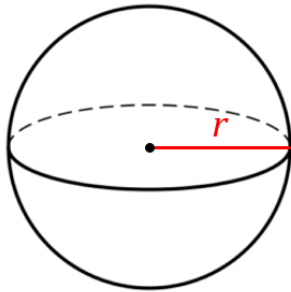


A gömb

A gömb adott ponttól (ez a gömb középpontja) adott távolságra (ez a gömb sugara) lévő pontok halmaza a térben. Gömböt kapunk akkor is, ha egy kört megforgatunk bármelyik szimmetriatengelye körül.



A gömb felszíne:

$$A = 4r^2 \cdot \pi$$

A gömb térfogata:

$$V = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$$

1. Egy gömb alakú labda belső sugara 13 cm. Hány liter levegő van benne?¹

Megoldás:

A gömb sugara $r = 13$ cm. A térfogatot keressük.

$$V = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3} = \frac{4 \cdot 13^3 \cdot \pi}{3} = 9198,11 \text{ cm}^3 = 9,19811 \text{ dm}^3 \approx 9,2 \text{ liter.}$$

2. Belefér-e egy 1600 cm^2 felszínű (gömb alakú) vasgolyó egy 20 cm élű kocka alakú dobozba?²

Megoldás:

A gömb felszínéből visszakeressük a gömb sugarát: $A = 4r^2 \cdot \pi$, azaz $1600 = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$, ahonnan $r = \sqrt{\frac{1600}{4\pi}} \approx 11,3 \text{ cm}$. A gömb átmérője így $2 \cdot 11,3 = 22,6 \text{ cm}$, így a gömb nem fér bele a dobozba.

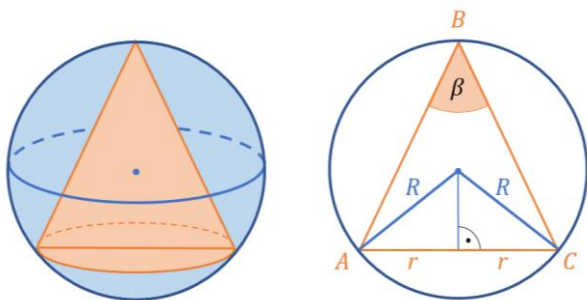
(Megjegyzés: rossz gondolat lenne, ha a kocka és a gömb térfogatát hasonlítanánk össze, mert $V_{\text{kocka}} = 20^3 = 8000 \text{ cm}^3$, $V_{\text{gömb}} = \frac{4 \cdot 11,3^3 \cdot \pi}{3} = 6041 \text{ cm}^3$ lenne, és eszerint a logika szerint a gömb belenyomorgatható lenne a kockába. Pedig nem.)

¹ Érettségi feladat volt 2005-ben.

² Érettségi feladat volt 2009-ben.

3. Egy gömbbe kúpot írtunk. (A kúp csúcsa és alapköre a gömbfelületre illeszkedik.) Mekkora a gömb felszíne és térfogata, ha a kúp alapkörének sugara 9 cm-es, a nyílásszöge pedig 40° -os?

Megoldás:



A kúp adatai:

$$r = 9 \text{ cm}$$

$$\beta = 40^\circ$$

A gömb sugarát (R) keressük a felszínhez és a térfogathoz.

Készült egy síkmetszet, amelyhez a kúp tengelyén áthaladó síkot használtuk.

A kúpból az ABC egyenlő szárú háromszög, a gömbből a háromszög köré írt kör lett.

Ismert a háromszög egyik oldala ($AC = 2r = 18 \text{ cm}$) és az oldallal szemben lévő szög ($\beta = 40^\circ$), és keressük a háromszög köré írt kör sugarát.

Ehhez tökéletes az általánosított sinustétel (a háromszög egy oldala a köré írt kör átmérőjének és az oldallal szemben lévő szög sinusának szorzata): $18 = 2 \cdot R \cdot \sin 40^\circ$, ahonnan $R = 14 \text{ cm}$.

A gömb sugara tehát: $R = 14 \text{ cm}$.

A gömb felszíne:

$$A = 4R^2\pi = 4 \cdot 14^2 \cdot \pi$$

$$A = 784\pi \approx 2461,76 \text{ cm}^2$$

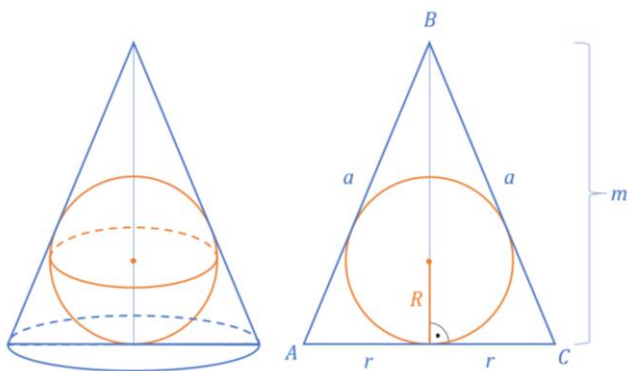
A gömb térfogata:

$$V = \frac{4R^3 \cdot \pi}{3} = \frac{4 \cdot 14^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{10976\pi}{3} \approx 11488,21 \text{ cm}^3$$

4. Egy kúp alapkörének sugara 15 cm, magassága 36 cm. Mekkora sugarú gömb írható a kúpba. (A kúp alapköre és palástja érinti a gömböt.)

Megoldás:



A kúp adatai:

$$r = 15 \text{ cm}$$

$$m = 36 \text{ cm}$$

A kúpba írt gömb sugarát (R) keressük.

Ha elkészítjük a megfelelő síkmetszetet (tengelymetszet), akkor látszik, hogy a kúpból kapott ABC egyenlő szárú háromszögbe írt kör (ez a gömbből lett) sugarát keressük.

Egy háromszög beírt körének sugara a háromszög egyik területképletében jelenik meg. (A háromszög területe a beírt kör sugarának és a kerület felének a szorzata.)

$$T_{ABC} = s_{ABC} \cdot R$$

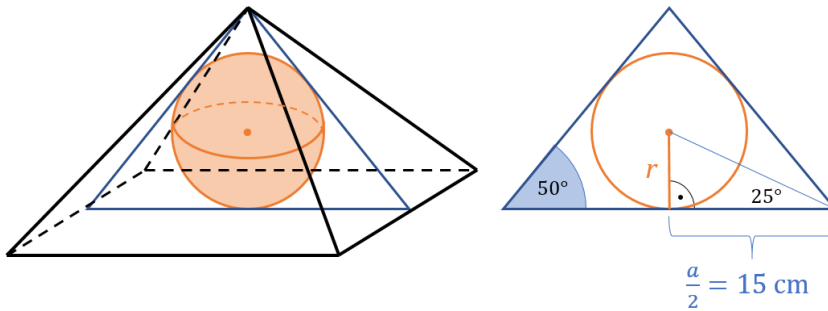
Ki kell számítanunk az ABC háromszög területét és kerületét.

A háromszög területe	A háromszög szárai (a kúp alkotója)	A háromszög kerülete
$T_{ABC} = \frac{AC \cdot m}{2} = \frac{2r \cdot m}{2}$	$r^2 + m^2 = a^2$	$K_{ABC} = 2r + a + a$
$T_{ABC} = \frac{30 \cdot 36}{2} = 540 \text{ cm}^2$	$15^2 + 36^2 = a^2$	$K_{ABC} = 30 + 39 + 39 = 108 \text{ cm}$
	$a = 39 \text{ cm}$	$s_{ABC} = \frac{K_{ABC}}{2} = \frac{108}{2} = 54 \text{ cm}$

Ekkor $T_{ABC} = s_{ABC} \cdot R$, azaz $540 = 54 \cdot R$, ahonnan $R = 10 \text{ cm}$. (Ez a beírható gömb sugara.)

5. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle $a = 30 \text{ cm}$, az oldallapok az alaplappal 50° -os szöget zárnak be. Mekkora sugarú gömb írható a gúlába?

Megoldás:



A gúlába írható gömböt érinti a gúla alaplapja és minden egyes oldallapja is. A jól ismert síkmetszeten egy egyenlő szárú háromszög beírt körének a sugara lett a kérdés.

Természetesen a kör sugarát most is meghatározhatnánk úgy, mint az előbb, de most inkább használjuk ki azt az információt, mely szerint a háromszög beírt körének középpontját a belső szögfelezők határozzák meg. (Hiszen a síkmetszet háromszögnek ismertek a szögei.)

A síkmetszeten látható, hogy a kör sugara, az alapél fele és a szögfelező megfelelő darabja egy derékszögű háromszöget ad, amelyben $\text{tg } 25^\circ = \frac{r}{15}$.

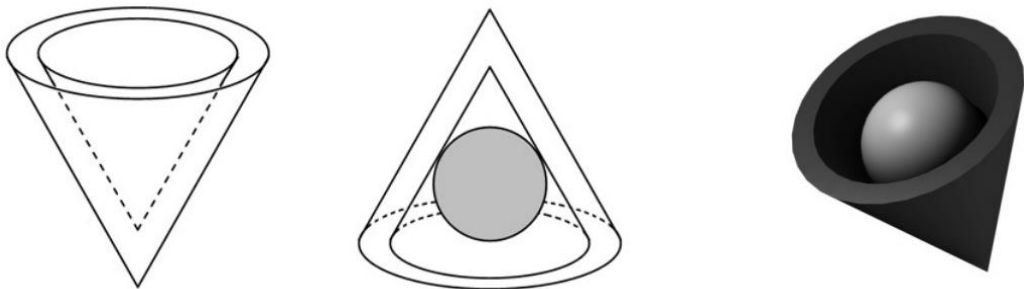
Innen $r = 15 \cdot \text{tg } 25^\circ \approx 7 \text{ cm}$.

Gyakorló feladatok

1. Egy gömb alakú gáztároló térfogata 5000 m^3 . Hány méter a gömb sugara? A választ egy tizedesre kerekítve adja meg!³

$$(V = 5000 = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}, \text{ ahonnan } r = \sqrt[3]{1194,27} \approx 10,6 \text{ m.})$$

2. Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. A desszert csokoládéból készült váza olyan, mint egy tölcser. (Lásd ábra.) A külső és belső kúp hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{6}{5}$. A kisebb kúp adatai: alapkörének sugara 1 cm, magassága 2,5 cm hosszú.



- a) Hány cm^3 csokoládét tartalmaz egy ilyen csokoládéváz? A választ tizedre kerekítve adja meg!

(A kisebb kúp adatai: $r = 1 \text{ cm}$, $m = 2,5 \text{ cm}$, így a térfogata $v = \frac{1^2 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} = 2,62 \text{ cm}^3$. A nagyobb kúp adatai a hasonlóság miatt: $R = \frac{6}{5} \cdot 1 = 1,2 \text{ cm}$, $M = \frac{6}{5} \cdot 2,5 = 3 \text{ cm}$, így a térfogata $V = \frac{1,2^2 \cdot \pi \cdot 3}{3} = 4,52 \text{ cm}^3$. Így a csokoládéváz térfogata: $4,52 - 2,62 = 1,9 \text{ cm}^3$.)

Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek, ezután egy csokoládéból készült vékony körlemezzel lezárják a kúpot.

- b) Hány cm a sugara a lehető legnagyobb méretű ilyen marcipángömbnek? A választ tizedre kerekítve adja meg!⁴

(A kicsi kúpba írunk gömböt, vagyis egy egyenlő szárú háromszögbe kört. A háromszög területe: $T = \frac{2 \cdot 2,5}{2} = 2,5 \text{ cm}^2$, a kúp alkotója, azaz a háromszög szára: $a = \sqrt{1^2 + 2,5^2} \approx 2,69 \text{ cm}$, így a háromszög kerülete: $K = 2 + 2,69 + 2,69 = 7,38 \text{ cm}$, félkerülete: $s = 3,69 \text{ cm}$. Mivel $T = s \cdot x$, azaz $2,5 = 3,69 \cdot x$, így $x = 0,68 \approx 0,7 \text{ cm}$ a marcipángömb sugara.)

³ Érettségi feladat volt 2009-ben.

⁴ Érettségi feladat volt 2010-ben.