

HALMAZOK

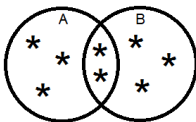
Fontosabb tudnivalók:

- A halmaz alapfogalom, nem definiáljuk.
- Jelölés: $A, B, C, \dots, \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$.
- A halmaz eleme alapfogalom, jelölés: $a \in A, b \notin A$.
- Üres halmaz: $\emptyset$.
- Számosság: véges, végtelen.
- Halmazok megadása:
Elemeinek felsorolásával: $A = \{1; 2; 3; 4\}$;
Szövegesen: $A = \{\text{ötnél kisebb pozitív egészek}\}$;
Képlettel: $A = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x < 5\}$;
- Halmazok közötti relációk: egyenlők ($A = B$), részhalmaz ($A \subseteq B$), valódi részhalmaz ($A \subset B$).
- Halmazok szemléltetése: Venn-diagrammal.

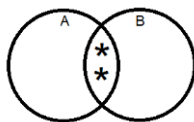


- Halmazműveletek:

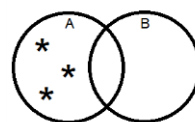
Unió: $A \cup B$



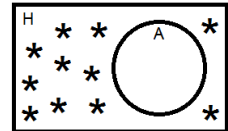
Metszet: $A \cap B$



Különbség: $A \setminus B$



Komplementer: $\overline{A}$



- Logikai szita: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Skatulyaelv.

1. Az A, B és C halmazok között ismerjük néhány művelet eredményét. Ezek ismeretében adjuk meg a három halmazt!

$$A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

$$A \setminus B = \{8; 9; 10\}$$

$$B \setminus C = \{2; 7\}$$

$$A \cap B = \{1; 2; 3\}$$

$$A \cap C = \{1; 3; 8\}$$

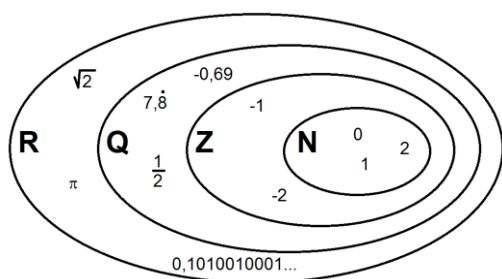
$$A \cap B \cap C = \{1; 3\}$$

2. Egy osztályba 32 diák jár. Közülük 16 tanul angolul, 13 tanul franciául és 13 tanul németül. Németül és franciául 5 diák tanul, németül és angolul 7 diák, angolul és franciául pedig 6. Mindhárom nyelvet 4 diák tanulja. Hányan nem tanulják egyik nyelvet sem?
3. Egy osztályba 38 diák jár, és mindenki sportol valamit. Atlétikával 19 diák foglalkozik, 21 diák röplabdázik és 12-en úsznak. Atlétizál és úszik 7 diák, atlétizál és röplabdázik 6 diák, röplabdázik és úszik 3 diák. Hányan foglalkoznak mindhárom sporttal?

4. Egy dobozban 4 piros, 5 kék és 6 sárga golyó van. Legalább hány golyót kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan mondhassuk
- van a kihúzottak között piros;
 - van a kihúzottak között két különböző színű;
 - mindegyik színből van a kihúzottak között.
5. Legalább hány embert kell megkérdeznünk ahhoz, hogy biztosan mondhassuk, van közöttük három olyan, akinek ugyanaz a horoszkópja.

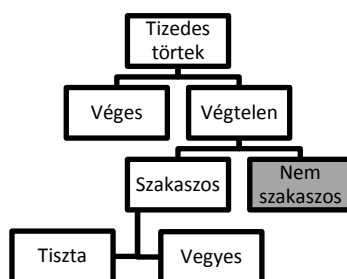
A SZÁMFOGALOM FELÉPÍTÉSE

Nevezetes számhalmazok

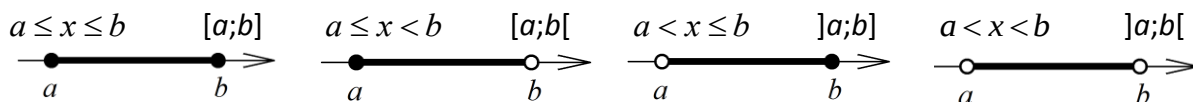


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Törtek csoportosítása



Intervallumok, normálalak, számrendszerek



- Adjuk meg az alábbi műveletek eredményét, és ábrázoljuk az intervallumokat és az eredményt számegyenesen!
 - $[-3; 5] \cup]-1; 7]$
 - $[-3; 5] \cap]-1; 7]$
 - $[-3; 5] \setminus]-1; 7]$
- Adjuk meg az alábbi számokat normálalakban!
 - $328 =$
 - $-57,13 =$
 - $0,013 =$
 - $-0,0069 =$
- Végezzük el az alábbi műveleteket, és a végeredményt adjuk meg normálalakban!

$$\frac{500 \cdot 0,00003}{2000000} = \frac{400000 \cdot 0,00006}{0,0003 \cdot 80000} =$$
- Írjuk fel az alábbi tízes számrendszerbeli számokat kettes számrendszerben!

8	14	45	71
---	----	----	----
- Adjuk meg az alábbi kettes számrendszerbeli számok alakját a tízes számrendszerben!

110_2	11001_2	100010_2	1011101_2
---------	-----------	------------	-------------

ALGEBRA

Nevezetes azonosságok

- 1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 3) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- 4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- 6) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

A szorzattá alakítás módszerei

- Kiemelés
- Kiemelés csoportosítással
- Nevezetes azonosságok használata
- Teljes négyzetté alakítás
- Gyöktényezős alak

1. Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$\frac{a^2 - a}{a - 1}$$

$$\frac{ax + ay + bx + by}{a^2b + ab^2}$$

2. Adjuk meg az $\frac{x^2 - y^2}{x - y} - \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} + \frac{2xy}{x^2}$ kifejezés helyettesítési értékét normálalakban, ha $x = 0,5$ és $y = 300000$.

SZÁMELMÉLET

Oszthatóság: $a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}$ és létezik $c \in \mathbf{N}$, hogy $a \cdot c = b$. Ekkor $a|b$.

Például: $a|a$ $1|a$ $a|0$ $0|0$ $5|15$ $3 \nmid 10$

Nem valódi osztók: az 1 és maga a szám. (Például 12 esetében az 1 és a 12.)

Valódi osztók: az 1-től és a számtól különböző osztók. (Például 12 esetében a 2, 3, 4, 6.)

Prímszám: Csak nem valódi osztói vannak (például: 2, 3, 5, 7, 11...). Végtelen sok prímszám van.

Összetett szám: Valódi osztói is vannak.

SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELE: Minden összetett szám a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen írható fel prímszámok szorzataként.

LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ: Olyan közös osztó, amely minden más közös osztónak többszöröse.

LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS: Olyan közös többszörös, amely minden más közös többszörösnek osztója.

RELATÍV PRÍMEK: Olyan számok, amelyek legnagyobb közös osztója 1. Például a 3 és a 4.

1. Határozzuk meg a 360 és a 450 legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!
2. Hány osztója van a 360-nak és a 450-nek?
3. Egy egyenes út egyik oldalán fák vannak 12 méterenként, a másik oldalán villanyoszlopok 15 méterenként. Egy helyen egymással szemben van egy oszlop és egy fa. Legkevesebb hány métert kell megtenni, hogy ismét egymással szemben legyen egy fa és egy oszlop.

Oszthatósági szabályok

- 2-re: a végződés 0, 2, 4, 6, 8.
- 3-ra: a számjegyek összegéből álló szám osztható 3-mal.
- 4-re: az utolsó két számjegyből álló szám osztható 4-gyel.
- 5-re: a végződés 0 vagy 5.
- 6-ra: a számjegyek összege osztható 3-mal és a szám páros.
- 8-ra: az utolsó három számjegyből álló szám osztható 8-cal.
- 9-re: a számjegyek összege osztható 9-cel.
- 10-re: a végződés 0.
- 11-re: a számjegyeket váltakozó előjellel összeadva a kapott szám osztható 11-gyel.
- 25-re: az utolsó két számjegyből álló szám osztható 25-tel (a végződés 00, 25, 50, 75).
- 125-re: az utolsó három számjegyből álló szám osztható 125-tel.
- Összetett számokkal való oszthatóság vizsgálata: a számot relatív prímelek szorzatára bontjuk, és a tényezőikkel vizsgáljuk az oszthatóságot. (Például: $12 = 3 \cdot 4$, $18 = 2 \cdot 9$, $24 = 3 \cdot 8$)

4. Pótoljuk a hiányzó számjegyeket úgy, hogy a kijelölt oszthatóság teljesüljön,

$$10 \mid \overline{12X5Y}$$

$$6 \mid \overline{7834X}$$

$$15 \mid \overline{2X35Y}$$

$$36 \mid \overline{2X35Y}$$

5. Hány olyan kétjegyű egész szám van, amely nem osztható sem 3-mal, sem 4-gyel és sem 5-tel?

LOGIKA

Egy állítás logikai értéke *igaz* vagy *hamis*.

LOGIKAI MŰVELETEK: tagadás, és, vagy, kizáró vagy, implikáció (következtetés), ekvivalencia.

ÁLLÍTÁS ÉS TAGADÁSA: a „minden” tagadása a „van olyan”.

ÁLLÍTÁS ÉS MEGFORDÍTÁSA: „Ha X , akkor Y .”-ből azt kapjuk, hogy „Ha Y , akkor X .”.

- Adjuk meg az alábbi állítások logikai értékét!
 - Minden négyzet téglalap.
 - Minden 3-mal osztható szám osztható 9-cel is.
 - A szabályos sokszögek középpontosan szimmetrikusak.
 - Három embert hatféleképpen lehet egymás mellé leültetni.
- Tagadjuk az alábbi kijelentéseket!
 - Minden szőke nő szeret tévésorozatokot nézni.
 - Minden négyzet paralelogramma.
- Fogalmazzuk meg az alábbi állítások megfordítását! Adjuk meg azok logikai értékét!
 - Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor páros.
 - Pitagorasz-tétel.