

HATVÁNYOZÁS

Az általános hatványalak: $a^n = b$.

A hatványozás definíciói (a kitevők alaphalmaza szerint):

1) $a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^+, n \geq 2$ esetén $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}$, például: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

2) $a^1 = a$ és $a^0 = 1$, ha $a \neq 0$

3) $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbf{N}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (negatív egész kitevőjű hatvány)

Például: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (reciprok)

4) $a \in \mathbf{R}^+, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^+, n \geq 2$ esetén $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (törtkitevőjű hatvány)

Például: $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 8$ $49^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{49^{-1}} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

5) Irracionális kitevő is létezik, azaz pozitív alap esetén a kitevő bármilyen valós szám lehet, és így a hatvány értéke is pozitív. Például: 2^π .

A hatványozás azonosságai (a változók lehetséges értékeinél):

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (azonos alapú hatványok szorzása)

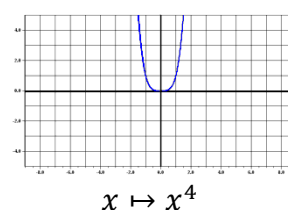
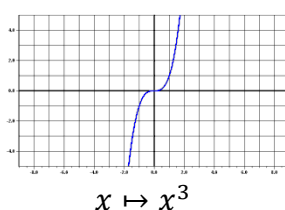
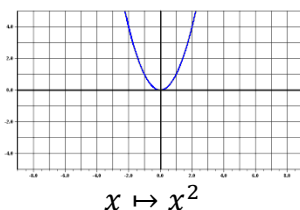
(2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$ (azonos alapú hatványok osztása)

(3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (hatvány hatványozása)

(4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (szorzat hatványozása)

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$ (tört hatványozása)

Hatványfüggvények



1. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$\frac{45^3 \cdot 20^4 \cdot 18^2}{180^5}$$

$$\frac{16^4 \cdot 8^{-3} \cdot 1024}{32^{-1} \cdot \frac{1}{64}}$$

$$\frac{\frac{1}{a} \cdot (a^2)^{-3} \cdot a^{10}}{(a^5 \cdot a^{-2})^4}$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot x^{-2} \cdot (xy^2)^3}{y^0 \cdot x^3}$$

2. Melyik szám a nagyobb? (Zsebszámológép nélkül döntsük el!)

$$\frac{2}{3^{18}} + \frac{4}{3^{19}} - \frac{4}{3^{20}} \text{ vagy } \frac{1}{3^{17}}$$

$$81^{10} \text{ vagy } 4^{20}$$

3. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}}$$

GYÖKVONÁS

Definíció: A $\sqrt{a}$ azt a nemnegatív számot jelenti, amelynek négyzete a .

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = |a| \quad \sqrt{x} \text{ esetén } x \geq 0, \text{ például } \sqrt{-25} \notin \mathbf{R}$$

Definíció: Ha n páratlan (páros), akkor $\sqrt[n]{a}$ jelenti azt a (nemnegatív) számot, amelynek n -edik hatványa a .

$$\text{Ha } n \text{ páros (2, 4, 6...): } \sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ és } \sqrt[n]{x} \text{ esetén } x \geq 0, \text{ például } \sqrt[4]{16} = 2 \text{ és } \sqrt[4]{-16} \notin \mathbf{R}$$

$$\text{Ha } n \text{ páratlan (3, 5, 7...): } \sqrt[n]{a^n} = a, \text{ például } \sqrt[5]{32} = 2 \text{ vagy } \sqrt[5]{-32} = -2$$

Azonosságok (a változók lehetséges értékeinél):

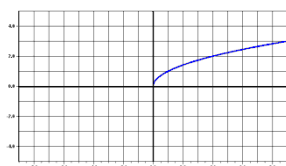
$$(1) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ (szorzat gyöke)}$$

$$(2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0 \text{ (tört gyöke)}$$

$$(3) (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} \text{ (a hatványozás és a gyökvonás felcserélhető)}$$

$$(4) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \text{ (gyök gyöke)}$$

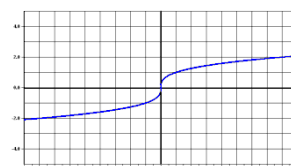
Gyökfüggvények



$$x \mapsto \sqrt{x}$$



$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x \quad x \mapsto \sqrt{x}$$



$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

1. Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$\sqrt{\frac{1}{x-2}} \quad \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} \quad \sqrt[4]{\frac{x-2}{x+3}} \quad \sqrt[100]{x^2-2x-3} \quad \sqrt{\frac{1}{5-10x}} \quad \sqrt[5]{\frac{x+8}{8+x}} \quad \sqrt[4]{\frac{5-x}{5+x}} \quad \sqrt[6]{x^2+2x-8}$$

2. Melyik szám a nagyobb? Zsebszámológép nélkül döntsük el! (BEVITEL A GYÖKJEL ALÁ)

$$2\sqrt{3} \text{ vagy } 3\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{3} \text{ vagy } 6\sqrt{2}$$

3. Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét! (KIHOZATAL A GYÖKJEL ALÓL)

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{147}$$

$$\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{-128}$$

$$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$$

4. Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét! (NEVEZŐ GYÖKTELENÍTÉSE)

$$\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{6}{5\sqrt{3}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{3 + \sqrt{6}}$$

$$\frac{10}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

LOGARITMUS

Hatványozás: $5^3 = ?$

Gyökvonás: $?^3 = 125$

Logaritmus: $5^? = 125$

Definíció: Az $\log_a b$ azt a kitevőt jelenti, amelyre a -t emelve b -t kapunk.

$$a^{\log_a b} = b$$

$$a > 0, a \neq 1, b > 0$$

$$\text{Például } 2^x = 3 \text{ esetén } x = \log_2 3$$

1. Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$\log_2(2x + 3)$$

$$\log_{x-3}(6 - x)$$

$$\log_5 \frac{1}{x + 5}$$

$$\log_{10-2x}(x + 2)$$

2. Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét!

$$\log_2 8$$

$$\log_3 81$$

$$\log_5 \frac{1}{5}$$

$$\log_7 \sqrt{7}$$

$$\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 32$$

$$\log_4 8$$

$$5^{\log_5 10}$$

$$10^{\lg 69}$$

$$9^{\log_3 5}$$

$$5^{\log_{25} 4}$$

$$7^{\frac{1}{2} \log_7 64}$$

$$3^{1 + \log_3 5}$$

$$2^{3 \log_2 4 - \log_4 36}$$

A logaritmus azonosságai

Példa

$$(1) \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) = \lg 10 = 1$$

$$(2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 = 3$$

$$(3) \log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$2^x = 3 \text{ esetén } \lg 2^x = \lg 3, \text{ azaz } x \cdot \lg 2 = \lg 3, \text{ így } x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$$

$$(4) \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$$

$$(5) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{0,4771}{0,3010} = 1,59$$

3. Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét!

$$\lg 33 - \frac{1}{2} \lg 44 - \lg 15 - \lg \sqrt{1100}$$

$$\frac{1}{2} \log_3 45 + \log_3 \sqrt{20} - \log_3 30 + \log_3 6 - \log_3 2$$

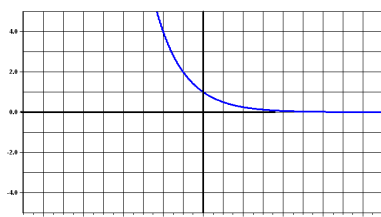
$$\log_2 \frac{1024 \cdot \sqrt[3]{32}}{\sqrt{128}}$$

$$\log_a \frac{\sqrt{a^3} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2)^3}{a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a^{27}}}$$

Exponenciális függvények

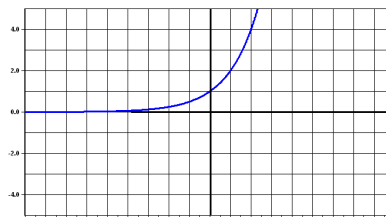
$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, x \mapsto a^x$$

$0 < a < 1$ (szigorúan monoton csökkenő)



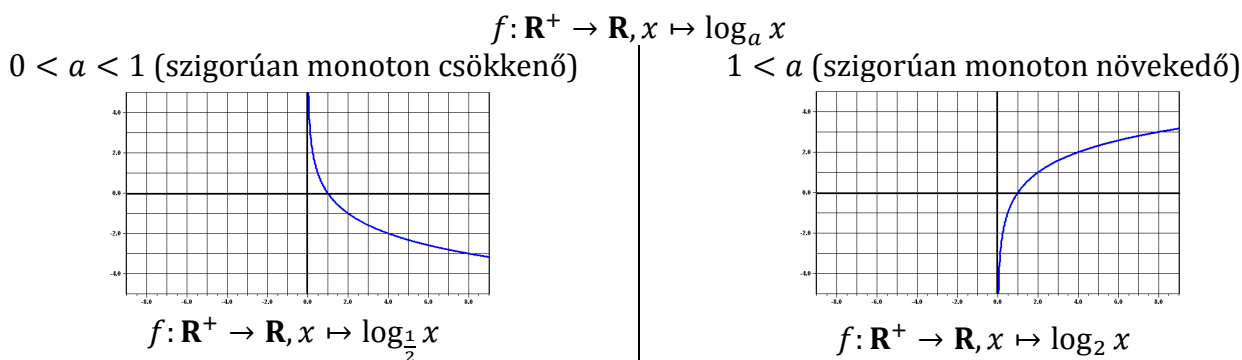
$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$1 < a$ (szigorúan monoton növekedő)



$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, x \mapsto 2^x$$

Logaritmusfüggvények



4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2x+3} = 5$$

$$\sqrt{5x+1} = x+1$$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket, egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

$$2^{5x-3} = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt{9^{3x-1}} = \sqrt[3]{81^{x+1}}$$

$$5^{x+2} - 3 \cdot 5^{x+1} = 50$$

$$9^{x-1} - 3^{x+1} + 3^{x-3} = 1$$

$$25^x < 5^{x-3}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2^y = 14 \\ 2^{x+y} = 16 \end{cases}$$

6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

$$\log_5(2x+1) = \log_5(7-4x) \quad \log_2(3x-4) = 1 \quad \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 8 + \lg(x-2)$$

$$\frac{\lg(x+3)}{\lg(9-x)} = 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+6) < -1$$

$$\lg\sqrt{3x-2} + \lg\sqrt{4x-7} = \lg 2$$

7. Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $\lg p_m = 0,8 \cdot \lg p_v + 0,301$ összefüggés áll fenn. A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

- Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén?
- Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat?
- Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást?

8. A világméretű szociológiai kutatások eredményeként a fejlett ipari országok egy főre jutó nemzeti összterméke (GDP) és a lakosság várható élettartama között hozzávetőleg az alábbi tapasztalati összefüggés állítható fel: $\hat{E} = 75,5 - 5 \cdot 1,081^{\frac{6000-G}{206}}$, ahol $\hat{E}$ az átlagos várható élettartam években, G pedig a GDP, reálértékben átszámítva 1980-as dollárra.

- Mennyi a várható élettartam abban az országban, ahol a GDP értéke 12000\$?
- Mennyi várható élettartam-növekedést okoz, ha a GDP 3000\$-ról 6000\$-ra nő?
- Mennyi a GDP abban az országban, ahol a várható élettartam 50 év?
- Mennyi GDP növekedés szükséges ahhoz, hogy a várható élettartam 60 évről 70-re változzon?

