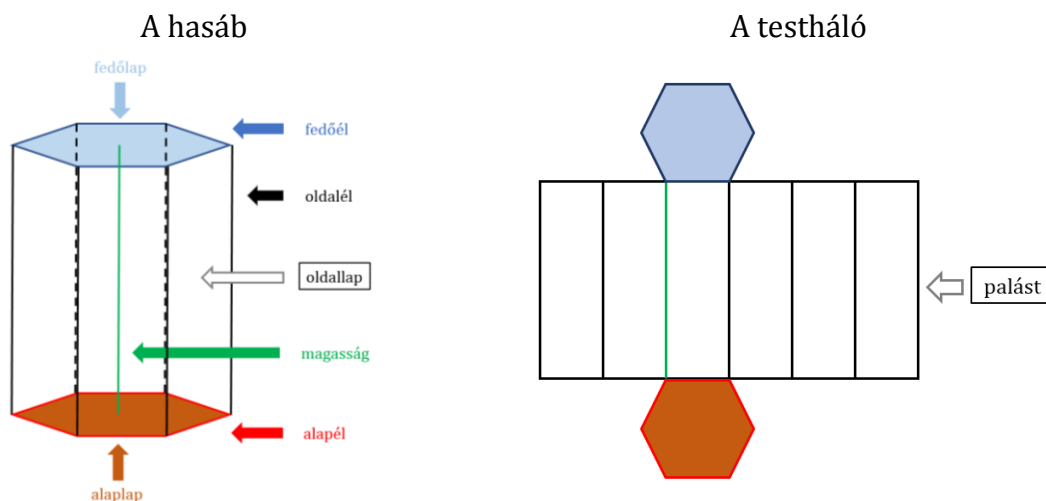


Az egyenes hasábok

A **hasábok** olyan *poliéderek* (sokszögek által határolt testek), amelyeknek van *alap-* és *fedőlapja* (ezek párhuzamosak), és vannak *oldallapjai* (ezek adják a hasáb *palástját*).

Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb (szabályos hatoldalú hasáb) segítségével tisztázzuk az elnevezéseket. A hasáb testhálójá is gyakran segít a számításoknál.



Megjegyzések:

- Az alaplapp és a fedőlap egybevágó („ugyanolyan”).
- A magasság az alaplapp és a fedőlap síkjának távolsága.
- Egyenes hasábok esetén a magasság párhuzamos az oldalélekkel, ezért azok egyenlő hosszúak. (Ellenkező esetben ferde hasábról van szó.)
- Egyenes hasáboknál az oldallapok mindig téglalapok.
- Természetesen a téglatest és a kocka is a hasábok csoportjába tartozik.

A hasábok felszíne

Mivel a hasáb poliéder, így *a határoló lapok területét kell összeadni*. Az alaplapp és a fedőlap területe megegyezik (T), az oldallapoké nem biztos, de azok együttes területe adja a palást területét (P). Ezt minden feladatban külön érdemes vizsgálni. Ezért a hasábok felszínképlete általánosan az alábbi:

$$A = 2T + P.$$

A hasábok térfogata

A hasábok térfogatához az alaplapp területe (T) és a hasáb magassága (m , ez egyenes hasáboknál az oldalél is) kell:

$$V = T \cdot m.$$

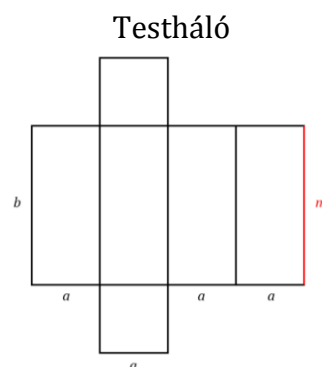
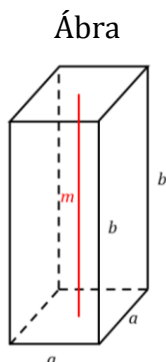
1. Egy négyzet alapú egyenes hasáb (négyzetes oszlop) alapéle 5 cm, oldaléle 10 cm. Mekkora a hasáb felszíne, térfogata?

Megoldás:

Adatok

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$b = m = 10 \text{ cm}$$



Az alaplap és a fedőlap egy a oldalú négyzet, ennek területe: $T = a^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$.

Négy egybevágó („ugyanolyan”) oldallap van, ezek téglalapok, amelyek oldalai a és b , így egy oldallap területe: $T_o = a \cdot b = 5 \cdot 10 = 50 \text{ cm}^2$.

Így a palást területe: $P = 4 \cdot T_o = 4 \cdot 50 = 200 \text{ cm}^2$.

Ekkor a felszín: $A = 2T + P = 2 \cdot 25 + 200 = 250 \text{ cm}^2$.

A térfogat pedig: $V = T \cdot m = 25 \cdot 10 = 250 \text{ cm}^3$.

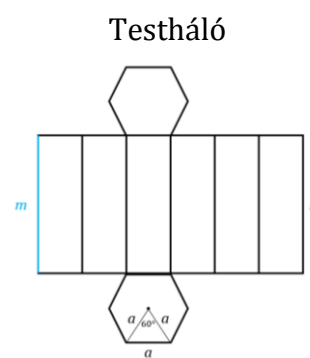
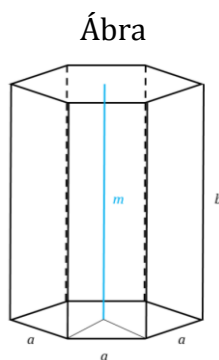
2. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 6 cm, magassága 15 cm. Mekkora a hasáb felszíne, térfogata?

Megoldás:

Adatok

$$a = 6 \text{ cm}$$

$$b = m = 15 \text{ cm}$$



Az alaplap és a fedőlap egy-egy szabályos hatszög, amely hat szabályos háromszögből áll.

Egy ilyen szabályos háromszög területe: $T_\Delta = \frac{a \cdot a \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. A hatszög területe: $T = 6 \cdot T_\Delta = 6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3} \approx 93,53 \text{ cm}^2$. A palást hat téglalabból áll, egy ilyennek a területe: $T_o = a \cdot b = 6 \cdot 15 = 90 \text{ cm}^2$. A palást így: $P = 6T_o = 6 \cdot 90 = 540 \text{ cm}^2$.

Így a felszín: $A = 2T + P = 2 \cdot 54\sqrt{3} + 540 \approx 727,06 \text{ cm}^2$, a térfogat: $V = Tm = 93,53 \cdot 15 = 1402,95 \text{ cm}^3$.

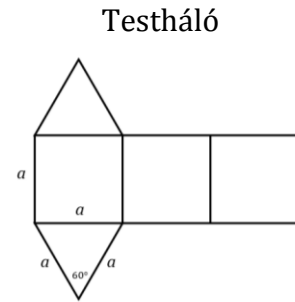
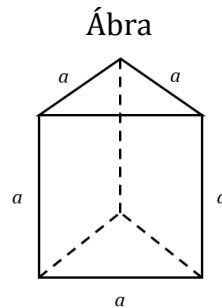
3. Egy háromoldalú egyenes hasáb minden éle 8 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

Megoldás:

Adatok

$$a = 8 \text{ cm}$$

$$m = a = 8 \text{ cm}$$



Mivel háromoldalú a hasáb, ezért az alaplapp és a fedőlap is háromszög. De mivel minden él egyenlő, így a háromszög oldalai is egyenlők, tehát ez a háromszög szabályos. Egy ilyen

háromszög területe: $T = \frac{a \cdot a \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{8^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Az oldallapok (három van) pedig olyan téglalapok, amelyek minden oldala egyenlő, így azok négyzetek. Egy oldallap területe: $T_o = a^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$. Így a palást: $P = 3T_o = 192 \text{ cm}^2$.

A felszín: $A = 2T + P = 2 \cdot 16\sqrt{3} + 192 = 32\sqrt{3} + 192 \approx 247,43 \text{ cm}^2$.

A térfogat: $V = Tm = 16\sqrt{3} \cdot 8 = 128\sqrt{3} \approx 221,7 \text{ cm}^3$.

4. Egy háromoldalú egyenes hasáb minden éle egyenlő, felszíne $386,6 \text{ cm}^2$. Mekkora az éle?

Megoldás:

Az előző feladat jelöléseit, ábráit és gondolatait fel tudjuk használni. Most az a az ismeretlen.

A hasáb alaplappja szabályos háromszög, területe: $T = \frac{a \cdot a \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = 0,433a^2$.

Az oldallapok négyzetek ($T_o = a^2$), így a palást: $P = 3a^2$.

A felszín: $A = 2T + P$, így

$$386,6 = 2 \cdot 0,433a^2 + 3a^2 = 0,866a^2 + 3a^2 = 3,866a^2, \text{ ahonnan}$$

$$100 = a^2, \text{ így } a = 10 \text{ cm.}$$

Gyakorló feladatok

1. Egy négyzetes oszlop alapéle 4 cm, térfogata 304 cm^3 . Mekkora a felszíne?

(A magasság/oldalél: $m = b = 19 \text{ cm}$, így a felszín: $A = 336 \text{ cm}^2$.)

2. Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel. Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében?

(Az alaplappal területe: $6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 14,96 \text{ m}^2$, a palást területe: $6 \cdot 2,4 \cdot 0,4 = 5,76 \text{ m}^2$, így a csempézendő felület: $20,72 \text{ m}^2$, hiszen itt nincs fedőlap. A térfogatot keressük még: $14,96 \cdot 0,4 = 5,984 \text{ m}^3 = 5984 \text{ dm}^3 = 5984 \text{ liter}$, mert 1 köbdeciméter egyezik meg 1 literrel.)¹

3. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm hosszú, palástjának területe (az oldallapok területösszege) hatszorosa az egyik alaplappal területének. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

(Az alaplappal területe: $\frac{8^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 27,71 \text{ cm}^2$, a palást így $6 \cdot 27,71 = 166,28 \text{ cm}^2$, így a felszín: $221,7 \text{ cm}^2$. Egy oldallap területe a palást területének harmada: $55,43 \text{ cm}^2$, ahonnan a hasáb magassága: $6,93 \text{ cm}$, így a térfogat $191,98 \text{ cm}^3$.)²

4. Egy egyenes hasáb alaplappja egy olyan háromszög, amelynek 6 cm és 10 cm hosszú oldala 120° -os szöget zár be. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata, ha magassága 13 cm?

(Az alaplappal harmadik oldala kiszámolható cosinustétellel: $6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ$, azaz 14 cm-es a harmadik oldal. Ennek a háromszögnek a területe: $\frac{6 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 25,98 \text{ cm}^2$, így a térfogat $25,98 \cdot 13 = 337,75 \text{ cm}^3$. Háromféle oldallap van, ezek területe: $6 \cdot 13 = 78 \text{ cm}^2$, $10 \cdot 13 = 130 \text{ cm}^2$ és $14 \cdot 13 = 182 \text{ cm}^2$, így a felszín $2 \cdot 25,98 + 78 + 130 + 182 = 441,96 \text{ cm}^2$.)

¹ Érettségi feladat volt 2014-ben.

² Érettségi feladat volt 2006-ban.