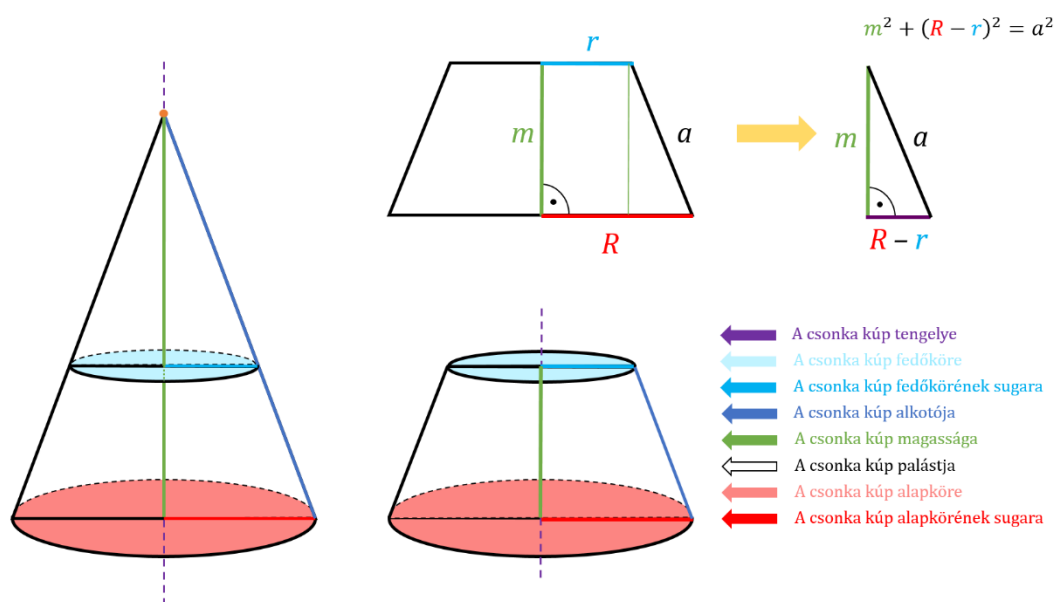


A csonka kúp

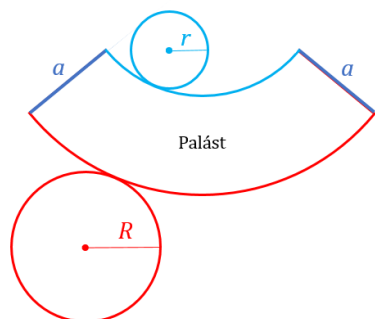
A csonka kúpok származtatása a csonka gúlékhoz hasonló. Egy kúpot az alaplapjával párhuzamos síkkal két testre vágunk. Egy kisebb kúp keletkezik, amely az eredeti kúphoz hasonló, és egy csonka kúp. Olyan problémákkal foglalkozunk, amelyek esetében a csonka kúp egyenes körhengerből származtatható. Csonka kúpot kapunk akkor is, ha egy szimmetrikus trapézt forgatunk meg a szimmetriatengelye körül.

Az alábbi ábrákon jól látható

- a származtatás;
- az összes elnevezés;
- a síkmetszet (a forgatandó szimmetrikus trapéz);
- a négy fontos adat (alapkör sugara, fedőkör sugara, magasság, alkotó) által meghatározott derékszögű háromszög, valamint a közöttük lévő kapcsolat (Pitagorasz tétele alapján).



A csonka kúp felszíne



A csonka kúp testhálója két körből (alapkör és fedőkör) és egy körgyűrűcikkéből (palást) áll, ezek területének összege adja a csonka kúp felszínét.

Az alapkör területe: $T = R^2\pi$.

A fedőkör területe: $t = r^2\pi$.

A palást területe: $P = (R + r) \cdot a \cdot \pi$.

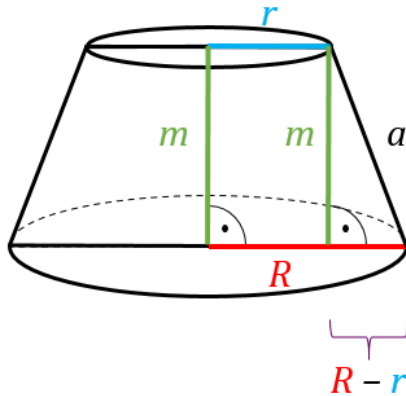
A csonkakúp felszíne: $A = R^2\pi + r^2\pi + (R + r) \cdot a \cdot \pi$

A csonka kúp térfogata

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

1. Egy csonka kúp alapkörének sugara 8 cm, fedőkörének sugara 3 cm, magassága 12 cm. Mekkora a csonka kúp felszíne és térfogata?

Megoldás:



$$\begin{aligned} R &= 8 \text{ cm} \\ r &= 3 \text{ cm} \\ m &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Így a térfogat:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

$$V = \frac{12 \cdot \pi}{3} \cdot (8^2 + 8 \cdot 3 + 3^2) = 388\pi \text{ cm}^3$$

A felszínhez szükségünk van még az alkotóra. A magasság berajzolásával kapott derékszögű háromszögben:

$$m^2 + (R - r)^2 = a^2$$

$$12^2 + 5^2 = a^2$$

$$a = 13 \text{ cm}$$

Ekkor a felszín:

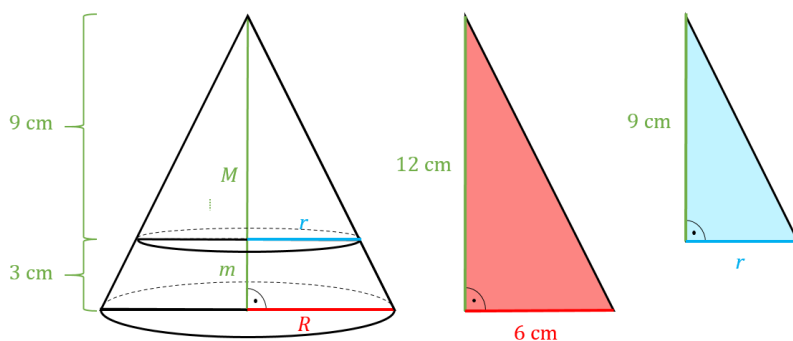
$$A = R^2\pi + r^2\pi + (R + r) \cdot a \cdot \pi$$

$$A = 8^2 \cdot \pi + 3^2 \cdot \pi + (8 + 3) \cdot 13 \cdot \pi$$

$$A = 216\pi \text{ cm}^2$$

2. Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 6 cm. A forgáskúpot két részre vágjuk az alaplap síkjával párhuzamos síkkal. Az alaplap és a párhuzamos sík távolsága 3 cm. Számítsa ki a keletkező csonka kúp térfogatát!¹

Megoldás:



$$\begin{aligned} M &= 12 \text{ cm} \\ R &= 6 \text{ cm} \\ m &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

A csonka kúp térfogatához még meg kell adnunk a csonka kúp fedőkörének sugarát(r).

Kirajoltuk a megfelelő síkmetszeteket. Két hasonló derékszögű háromszög keletkezett. Felírjuk a megfelelő oldalak arányát.

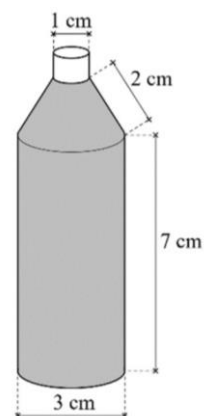
$$\frac{r}{9} = \frac{6}{12}$$

¹ Érettségi feladat volt 2019-ben.

Innen a fedőkör sugara: $r = 4,5$ cm. A csonka kúp térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{3 \cdot \pi}{3} \cdot (6^2 + 6 \cdot 4,5 + 4,5^2) = 83,25\pi \approx 261,41 \text{ cm}^3.$$

3. Cili – hogy segítse szervezete regenerálódását – vitamincseppeket szed. Naponta 2×25 csepp az adagja. Körülbelül 20 csepp folyadék térfogata 1 milliliter. A vitaminoldatot olyan üvegben árulják, amely két henger alakú és egy csonka kúp alakú részből áll. A folyadék a csonka kúp alakú rész fedőlapjára ér. Az üveg belső méreteit az ábra mutatja. A nagyobb henger átmérője 3 cm, magassága 7 cm. A csonkakúp fedőlapjának átmérője 1 cm, alkotója 2 cm hosszú. Hány napig elegendő Cilinek az üvegben lévő vitaminoldat, ha mindig az előírt adagban szedi?²



Megoldás:

A nagy henger és a csonka kúp térfogatát kell először meghatároznunk.

Henger	Adatok	Térfogat
	$R = 1,5$ cm $M = 7$ cm	$V_{\text{henger}} = R^2 \cdot \pi \cdot M = 1,5^2 \cdot \pi \cdot 7 = 49,5 \text{ cm}^3$

Csonka kúp	Adatok	Magasság	Térfogat
	$R = 1,5$ cm $r = 0,5$ cm $a = 2$ cm	Pitagorasz tétele miatt: $m^2 + (R - r)^2 = a^2$ $m^2 + 1^2 = 2^2$ $m = \sqrt{3} \approx 1,73$ cm	$V_{\text{csonka kúp}} = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$ $V_{\text{csonka kúp}} = \frac{1,73 \cdot \pi}{3} \cdot (1,5^2 + 1,5 \cdot 0,5 + 0,5^2)$ $V_{\text{csonka kúp}} = 5,9 \text{ cm}^3$

Így az üvegben lévő folyadék térfogata:

$$V = V_{\text{henger}} + V_{\text{csonka kúp}} = 49,5 + 5,9 = 55,4 \text{ cm}^3.$$

A feladatban Cili napi adagját milliliterben adták meg, így érdemes az üvegben lévő folyadék térfogatát is milliliterre váltanunk.

² Érettségi feladat volt 2018-ban.

$$V = 55,4 \text{ cm}^3 = 0,0554 \text{ dm}^3 = 0,0554 \text{ l} = 55,4 \text{ ml}$$

(Ez nem is meglepő, hiszen liter és milliliter között ugyanúgy 1000-es a váltás, mint a dm^3 és a cm^3 között.)

Ha 1 milliliter 20 cseppet jelent (ez áll a feladatban), akkor 55,4 milliliter $55,4 \cdot 20 = 1108$ cseppet. (Azaz az üvegben 1108 cseppnyi folyadék van.)

Cili napi adagja (a feladat szerint) $2 \cdot 25 = 50$ csepp, így az üvegben lévő vitaminoldat $\frac{1108}{50} = 22,16 \approx 22$ napra elegendő.

4. Egy jégkrémgyártó üzem fagylalttölcséreket rendel. A csonkakúp alakú fagylalttölcsér belső méretei: felső átmérő 7 cm, alsó átmérő 4 cm, magasság 8 cm. Számítsa ki, hogy a tölcsérbe legfeljebb hány cm^3 jégkrém fér el, ha a jégkrém – a csomagolás miatt – csak a felső perem síkjáig érhet!



Ennek a tölcsérnek létezik olyan változata is, amelynek a belső felületét vékony csokoládéréteggel vonják be. 1 kg csokoládé kb. $0,7 \text{ m}^2$ felület bevonásához elegendő. Számítsa ki, hogy hány kilogramm csokoládéra van szükség 1000 darab tölcsér belső felületének bevonásához! Válaszát egész kilogrammra kerekítve adja meg!³

Megoldás:

Az adatok: $R = 3,5 \text{ cm}$, $r = 2 \text{ cm}$ és $m = 8 \text{ cm}$.

Térfogatot könnyen számolunk: $V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$.

$$V = \frac{8 \cdot \pi}{3} \cdot (3,5^2 + 3,5 \cdot 2 + 2^2) = 195 \text{ cm}^3.$$

A csokoládéval bevonandó felület a kisebbik kör és a palást területéből jön össze. A palást területéhez szükségünk lesz az alkotóra.

Az alkotó	A felület
A síkmetszetben lévő derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint:	A kicsi kör területe: $t = r^2 \pi = 2^2 \cdot \pi = 12,6 \text{ cm}^2$
$m^2 + (R - r)^2 = a^2$	A palást területe: $P = (R + r) \cdot a \cdot \pi = (3,5 + 2) \cdot 8,14 \cdot \pi$
$8^2 + 1,5^2 = a^2$	$P = 140,6 \text{ cm}^2$
$a = 8,14 \text{ cm}$	Így a felület egy tölcsér esetén:
	$F = t + P = 12,6 + 140,6 = 153,2 \text{ cm}^2$

³ Érettségi feladat volt 2018-ban.

Így tehát 1 tölcsér esetében a bevonandó felület $153,2 \text{ cm}^2$, ezért 1000 tölcsér esetében ez $153,2 \cdot 1000 = 153200 \text{ cm}^2$.

Ezt át kell váltanunk m^2 -re: $153200 \text{ cm}^2 = 1532 \text{ dm}^2 = 15,32 \text{ m}^2$.

Tudjuk, hogy 1 kg csokoládé $0,7 \text{ m}^2$ -nyi felülethez elég. Akkor $15,32 \text{ m}^2$ -hez $\frac{15,32}{0,7} = 21,89$ lenne a szükséges mennyiség, amely egészre kerekítve 22 kg.

Gyakorló feladatok

1. Egy szimmetrikus trapéz alapjai 10 cm és 2 cm hosszúak, magassága 3 cm. A trapézt megforgatjuk szimmetriatengelye körül. Mekkora lesz az így kapott forgástest (csonka kúp) felszíne és térfogata?

(Az adatok: $R = 5 \text{ cm}$, $r = 1 \text{ cm}$, $m = 3 \text{ cm}$. Az alkotó számolható: $a = 5 \text{ cm}$. A felszín $56\pi \approx 175,84 \text{ cm}^2$, a térfogat $31\pi \approx 97,34 \text{ cm}^3$.)

2. Egy csonkakúp alakú tejfölös doboz méretei a következők: az alaplappól átmérője 6 cm, a fedőlap átmérője 11 cm és az alkotója 8,5 cm. Hány cm^3 tejföl kerül a dobozba, ha a gyárban a kisebbik körlapján álló dobozt magasságának 86%-áig töltik meg? Válaszát tíz cm^3 -re kerekítve adja meg!⁴

(Az eredeti doboznak megfelelő csonka kúp adatai: $R = 5,5 \text{ cm}$, $r = 3 \text{ cm}$, $a = 8,5$. Így az eredeti csonka gúla magassága: $m = \sqrt{8,5^2 - 2,5^2} \approx 8,12 \text{ cm}$.

A tejföllel kitöltött csonka gúla adatai: $r = 3 \text{ cm}$, $m' = 8,12 \cdot 0,86 = 7 \text{ cm}$, $a' = 8,5 \cdot 0,86 = 7,31 \text{ cm}$. Ezekből kiszámolható a fedőkör sugara az $(R' - 3)^2 + 7^2 = 7,31^2$ összefüggés segítségével: $R' = 5,12 \text{ cm}$. Így a térfogat $370,54 \text{ cm}^3$, amely tíz cm^3 -re kerekítve 370 cm^3 .)

⁴ Érettségi feladat volt 2011-ben.