

VEKTOROK

A vektor irányított szakasz. Nagysága és iránya jellemzi. A nullvektor hossza 0, iránya tetszőleges.

Vektorok a síkon



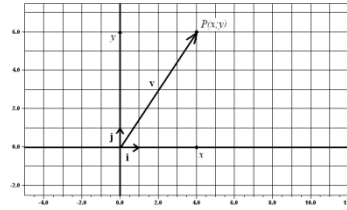
Jelölés: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\underline{a}$, $\mathbf{a}$

Vektor hossza:

$$|\mathbf{a}| \geq 0$$

$$|\mathbf{0}| = 0$$

Vektorok a koordináta-rendszerben



Megadás:

$$A(a_1; a_2) \quad \mathbf{a}(a_1; a_2)$$

$$B(b_1; b_2) \quad \mathbf{b}(b_1; b_2)$$

Szabadvektor:

$$\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$$

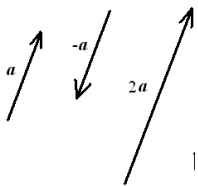
Vektor hossza:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Például:

$$\mathbf{a}(3; 4) \quad \mathbf{b}(8; -6)$$

Vektorműveletek Skalárral való szorzás



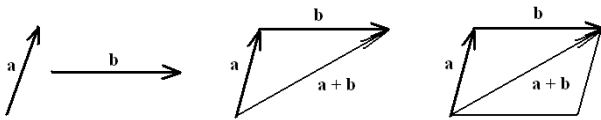
$\lambda \mathbf{a}$

$$\lambda \mathbf{a}(\lambda a_1; \lambda a_2)$$

$$-2\mathbf{b}$$

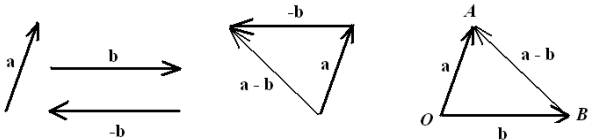
$$\frac{1}{2}\mathbf{a}$$

Összeadás



$$\mathbf{a} + \mathbf{b}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

Kivonás



$$\mathbf{a} - \mathbf{b}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

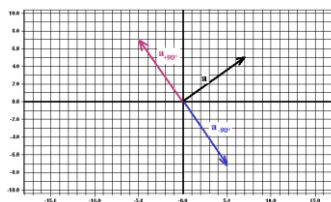
$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Skaláris szorzat

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \gamma$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

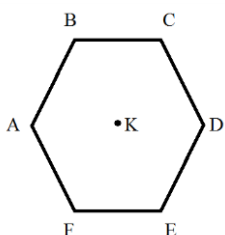
Elforgatás 90°-kal



$$\mathbf{a}_{+90^\circ}(-a_2; a_1)$$

$$\mathbf{a}_{-90^\circ}(a_2; -a_1)$$

1. Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben megadunk két vektort: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{AF}$. Ezek segítségével írjuk fel az alábbi vektorokat!



$$\overrightarrow{ED}$$

$$\overrightarrow{AK}$$

$$\overrightarrow{KE}$$

$$\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{FC}$$

$$\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DK}$$

$$\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BP}$$

$$\overrightarrow{KB}$$

$$\overrightarrow{CE}$$

2. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-4; 2)$, $B(4; -2)$ és $C(2; 6)$. Három vektort értelmezünk a következőképpen: $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$.

- Adjuk meg a három vektort a koordinátáikkal! Milyen hosszúak?
- Mik lesznek a $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektor koordinátái?
- Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzata?
- Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge?

KOORDINÁTA-GEOMETRIA

Az AB szakasz felezési pontja: $F\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

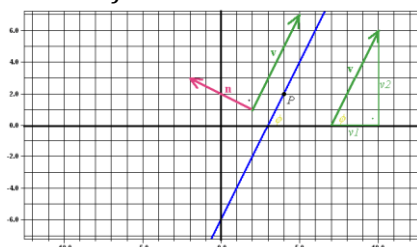
Az AB szakasz $m : n$ arányú osztópontja: $P\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n}; \frac{na_2+mb_2}{m+n}\right)$.

Az ABC háromszög súlypontja: $S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

1. Egy háromszög csúcsai: $A(-3; 2)$, $B(4; 2)$ és $C(2; -4)$.
 - a) Mekkora a háromszög kerülete?
 - b) Mekkora a háromszög szögei?
 - c) Mekkora a háromszög területe?
 - d) Mik lesznek a háromszög súlypontjának koordinátái?
 - e) Milyen hosszú az A csúcsból kiinduló súlyvonal?

Az egyenes

Jellemző adatok



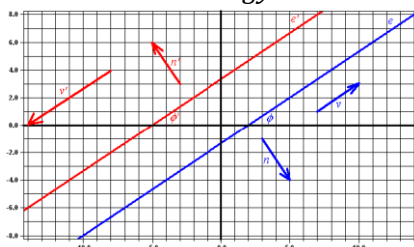
Normálvektor: $\mathbf{n}(A; B)$

Irányvektor: $\mathbf{v}(v_1; v_2)$

Irányszög: φ

Iránytangens: $m = \tan \varphi = \frac{v_2}{v_1}$

Párhuzamos egyenesek



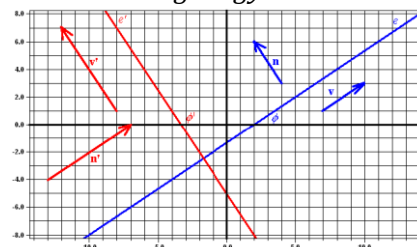
$\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}'$

$\mathbf{v} \parallel \mathbf{v}'$

$\varphi = \varphi'$

$m = m'$

Merőleges egyenesek



$\mathbf{n} \perp \mathbf{n}'$

$\mathbf{v} \perp \mathbf{v}'$

$\varphi' = \varphi + 90^\circ$

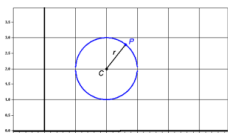
$m \cdot m' = -1$

Az egyenes egyenlete, két egyenes metszéspontja

Normálvektoros egyenlet $Ax + By = Ax_0 + By_0$ Például: $\mathbf{n}(5; 2), P_0(1; 2)$	Irányvektoros egyenlet $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$ Például: $\mathbf{v}(-2; 3), P_0(5; -1)$	Iránytangenses egyenlet $m \cdot (x - x_0) = y - y_0$ Például: $\varphi = 45^\circ, P_0(3; -1)$
--	---	---

2. Az e egyenes egyenlete: $y = -2x + 3$, az f egyenes egyenlete $y = ax - 1$, a g egyenes egyenlete $y = bx - 4$.
 - a) Adjuk meg az a paraméter értékét, ha tudjuk, hogy e és f párhuzamosak.
 - b) Adjuk meg a b paraméter értékét, ha tudjuk, hogy e és g merőlegesek.
3. Adjuk meg a $3x - 2y = 6$ egyenes egy normálvektorát, egy irányvektorát, az irántangensét és az irányszögét, valamint adjunk meg egy pontot az egyenesről!
4. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai: $A(-3; 2)$ és $B(1; -2)$. A háromszög harmadik csúcsa az $e: 2x - y = 4$ egyenesre illeszkedik. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

A kör



Adott: $C(u; v)$ és r (középpont és sugár).

$$k: (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

- 5.
- Írjuk fel a $C(3; -4)$ középpontú, 6 egység sugarú kör egyenletét!
 - Egy kör középpontja $C(1; 5)$, a körvonal egy pontja $P(-3; 2)$. Adjuk meg a kör egyenletét!
 - Egy kör átmérőjének két végpontja: $A(-5; 1)$ és $B(7; -3)$. Írjuk fel a kör egyenletét!
 - Adjuk meg az $(x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 17$ egyenletű kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát!
 - Lehet-e kör egyenlete az $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 100 = 0$ másodfokú kétismeretlenes egyenlet?
6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $k: x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$ egyenletű kör középpontján és párhuzamos az $e: 2x + 3y = 5$ egyenletű egyenessel.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete

		
Nincs közös pontjuk	Egy közös pontjuk van, az egyenes érinti a kört.	Két közös pontjuk van (metszők).

- Egy derékszögű háromszög átfogójának két végpontja: $A(7; 2)$ és $B(1; 10)$. A harmadik csúcs illeszkedik az $e: 3x + 4y = 11$ egyenletű egyenesre. Adjuk meg a harmadik csúcs koordinátáit!
- Egy kör középpontjának koordinátái: $C(9; -8)$, sugara: $r = 10$. Írjuk fel a kör $P(1; -2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét!
- Egy kör középpontja: $C(5; 2)$, sugara: $r = \sqrt{50}$. Milyen helyzetű a kör és az $e: 3x - 4y - 32 = 0$ egyenletű egyenes?

SOROZATOK

A pozitív természetes számok halmazán értelmezett függvények a sorozatok.

Számtani sorozatok (az első eleme és a differenciája – különbsége – jellemzi)

$$a_n = a_{n-1} + d \quad a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1) \cdot d}{2} \cdot n \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

- Egy számtani sorozat első eleme 5, különbsége 3. Mekkora a tizedik eleme, és mennyi az első tíz elem összege?
- Egy számtani sorozat nyolcadik eleme 27, differenciája 3. Mekkora az első eleme, és mennyi az első nyolc elem összege?
- Egy számtani sorozat második és nyolcadik tagjának összege 2, kilencedik és harmadik tagjának különbsége 24. Mennyi az első tíz tag összege?
- Mennyi a kétjegyű, 7-tel osztható pozitív egész számok összege?
- Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azutánin 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.
 - Hány méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon?
 - Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele?
 - Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon?
 - A 21-edik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával?

Mértani sorozatok (az első eleme és a kvóciense – hányadosa – jellemzi)

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

6. Egy mértani sorozat első eleme 3, hányadosa 2. Mekkora a tizedik elem, és mennyi az első tíz elem összege?
7. Egy mértani sorozat második eleme 32, hatodik eleme 2. Mekkora a kvóciense?
8. Egy mértani sorozat első három tagjának szorzata 125, negyedik tagja 20. Mekkora az első tagja és a hányadosa?
9. Egy mértani sorozat első tagja 2, hányadosa 3. Hányadik tagja a 4374?
10. Egy mértani sorozat első eleme 5, hányadosa 2. Az első hány elemet adtuk össze, ha az eredmény 5115 lett?

Kamatos kamatszámítás

$$Y = X \cdot p^n$$

11. Beteszünk a bankba 1 000 000 Ft-ot, az éves kamat 5%. Mennyit vehetünk ki 3 év múlva?
12. Egy gép ára 200 000 Ft. Elhasználódás és elavulás miatt évenkénti 20%-os értékcsökkenést figyelembe véve, mennyit ér a gép 4 év múlva?
13. Egy sertéshizlaldában 2500 sertés van. A mindenkori állatállomány évenként 5%-kal gyarapszik, de kétevenként a meglévő állomány 3%-át levágják. Mennyi állít lesz 12 év múlva?
14. Mennyi volt az éves kamatláb, ha 2 000 000 Ft-ot egy számlán kamatoztattunk, és 3 év múlva 2 590 058 Ft-ot vehettünk fel.
15. Egy városban jelenleg 90 392 lakos él. Öt évvel ezelőtt 100 000 ember lakott itt. Évente átlagosan hány százalékkal csökkent a népesség?
16. A 2000 eurós tőke évi 6 %-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra?
17. Egy gép évente 10%-ot veszít az értékéből. A tulajdonos úgy dönt, hogy a gépet eladja, ha értéke a vásárlási érték felénél kevesebb lesz. Hány év után következik ez be?
18. A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékbán helyezte el az A Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)
 - a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott?
 - b) A Nagy család a B Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra. Hány százalékos volt a B Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel?
 - c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.)