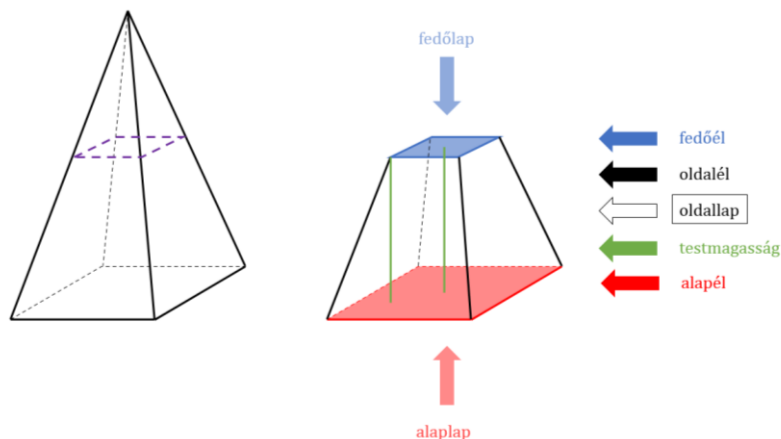
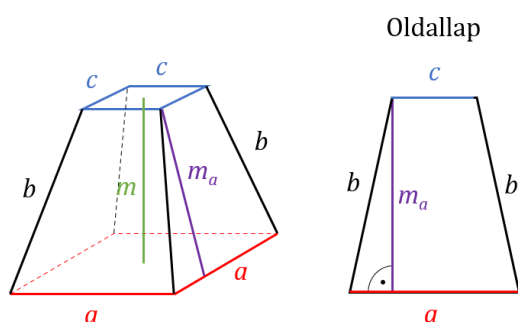
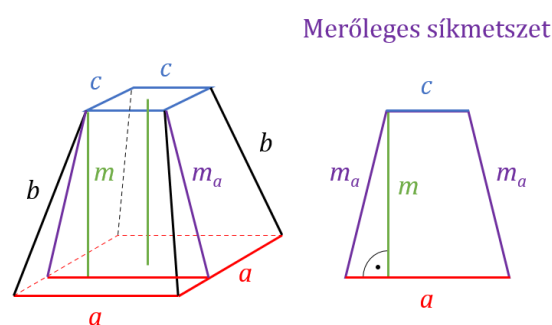
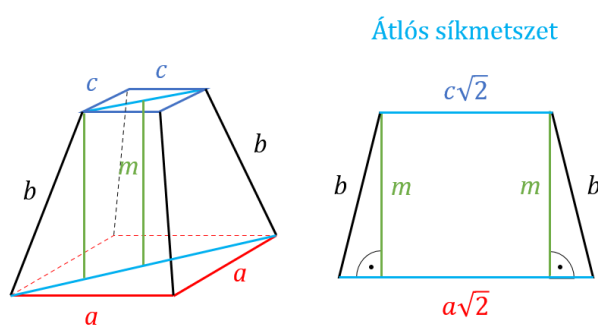


A csonka gúla

Ha egy gúlát az alaplapjával párhuzamos síkkal két részre vágunk, akkor egy (az eredetihez hasonló) gúla és egy *csonka gúla* keletkezik.



Természetesen a csonka gúla alap- és fedőlapja akármilyen sokszög lehet, és ezek biztosan hasonlóak. Itt most részletesen a **négyzet alapú egyenes csonka gúláról** (négyzetes csonka gúla) lesz szó. Az oldallapokat és két síkmetszetet külön is érdemes vizsgálni.



Az egyenes csonka gúla oldallapjai szimmetrikus trapézok. Ezek az oldallapok együtt adják a csonka gúla *palástját*.

Egy ilyen (oldallap) trapéz területe:

$$T_o = \frac{a+c}{2} \cdot m_a$$

A csonka gúla felszíne

A csonka gúla poliéder (sokszöglapok határolják), így az alaplap (T), a fedőlap (t) és a palást (P) területe együtt adja a csonka gúla felszínét. Általánosan: $A = T + t + P$.

A négyzet alapú egyenes csonka gúla esetén $T = a^2$, $t = c^2$ és $P = 4T_o = 4 \cdot \frac{a+c}{2} \cdot m_a$, így

$$A = a^2 + c^2 + 2 \cdot (a + c) \cdot m_a.$$

(Vagyis az alapél, a fedőél és az oldallap magassága kell a felszínhez négyzetes csonka gúla esetén.)

A csonka gúla térfogata

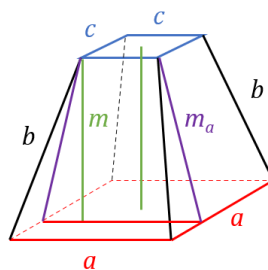
Általánosan az alaplap területe (T), a fedőlap területe (t) és a csonka gúla magassága (m) kell a térfogat meghatározásához:

$$V = \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t).$$

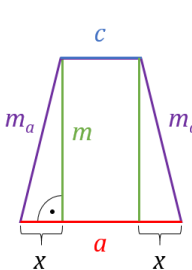
Négyzetes csonka gúla esetében: $V = \frac{m}{3} \cdot (a^2 + ac + c^2).$

1. Egy négyzet alapú csonka gúla alapéle 18 cm, fedőéle 8 cm, magassága 12 cm hosszú. Mekkora a felszíne és a térfogata? Mekkora a csonka gúla oldaléle?

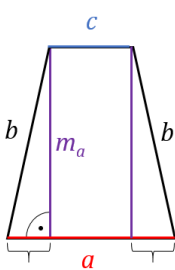
Megoldás:



Merőleges síkmetszet



Oldallap



$a = 18 \text{ cm}$
 $c = 8 \text{ cm}$
 $m = 12 \text{ cm}$

A felszínhez és a térfogathoz is szükséges az alap- és a fedőlap területe:

$T = a^2 = 18^2 = 324 \text{ cm}^2$
 $t = c^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$

A térfogat ezek után már megadható.

$$V = \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{Tt} + t) = \frac{12}{3} \cdot (324 + \sqrt{324 \cdot 64} + 64) = 4 \cdot 532 = 2128 \text{ cm}^3$$

A felszínhez szükségünk lesz az oldallapok területére, ahhoz pedig az oldallapok (ezek szimmetrikus trapézok) magasságára (m_a).

A **merőleges síkmetszet** is egy szimmetrikus trapéz, ebben igaz, hogy $x = \frac{a-c}{2} = \frac{18-8}{2} = 5 \text{ cm}$.

A **merőleges síkmetszetben** lévő derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele miatt igaz, hogy: $x^2 + m^2 = m_a^2$, azaz $5^2 + 12^2 = m_a^2$, ahonnan $m_a = 13 \text{ cm}$.

Így egy oldallap területe: $T_o = \frac{a+c}{2} \cdot m_a = \frac{18+8}{2} \cdot 13 = 169 \text{ cm}^2$.

Így a palást: $P = 4T_o = 4 \cdot 169 = 676 \text{ cm}^2$.

Ekkor a felszín: $A = T + t + P = 324 + 64 + 676 = 1064 \text{ cm}^2$.

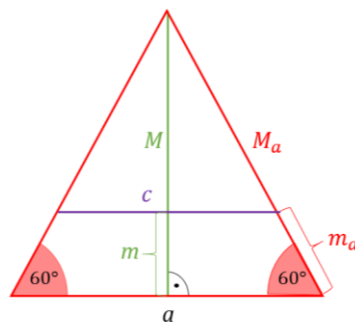
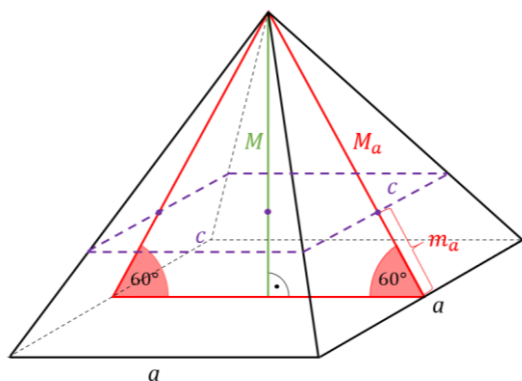
Az oldalél (b) megadásához tekintsünk egy oldallapot, amely szimmetrikus trapéz. Ebben is található megfelelő derékszögű háromszög, amelynek egyik befogója éppen az x -szel jelölt szakasz, a másik befogója az oldallap magassága, és az átfogó a keresett oldalél.

Pitagorasz tétele szerint: $x^2 + m_a^2 = b^2$, azaz $5^2 + 13^2 = b^2$.

Ekkor a csonka gúla oldaléle: $b = \sqrt{194} \approx 13,93 \text{ cm}$.

2. Egy szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúla alapéle 12 cm, oldallapjai 60° -os szöget zárnak be az alaplap síkjával. A gúlát két részre osztjuk egy az alaplappal párhuzamos síkkal, amely a gúla magasságát a csúcstól távolabbi harmadoló pontban metszi. Mekkora a csonka gúla felszíne, térfogata?¹

Megoldás:



$$a = 12 \text{ cm}$$

Mivel a **síkmetszet háromszögben** lévő szögek 60° -osak, így ez egy szabályos háromszög. Ezért (a gúla oldallapjának magassága)

$$M_a = 12 \text{ cm.}$$

A gúla magassága

A **síkmetszetben** lévő derékszögű háromszögben:

$$\sin 60^\circ = \frac{M}{M_a}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{M}{12}$$

$$M = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \text{ cm}$$

Mivel a feladat szerint a sík a gúla **magasságát** a csúcstól távolabbi harmadoló-pontban metszi el, így

$$m = \frac{M}{3} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ cm}$$

Hasonlóképpen az oldallapok magasságára:

$$m_a = \frac{M_a}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ cm}$$

A csonka gúla adatai

A **síkmetszeten** lévő két szabályos háromszög hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$. Ezért

$$c = \frac{2}{3} \cdot a = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ cm}$$

Így a csonka gúlát alkotó négyszögek területei:

$$T = a^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$t = c^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$

$$T_o = \frac{a + c}{2} \cdot m_a = \frac{12 + 8}{2} \cdot 4$$

$$T_o = 40 \text{ cm}^2$$

Így a palást:

$$P = 4T_o = 4 \cdot 40 = 160 \text{ cm}^2$$

A felszín:

$$A = T + t + P$$

$$A = 144 + 64 + 160$$

$$A = 368 \text{ cm}^2$$

¹ Érettségi feladat volt 2012-ben.

A térfogat:

$$V = \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{Tt} + t)$$

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (144 + \sqrt{144 \cdot 64} + 64)$$

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 304 = \frac{608\sqrt{3}}{3} \approx 351,03 \text{ cm}^3$$

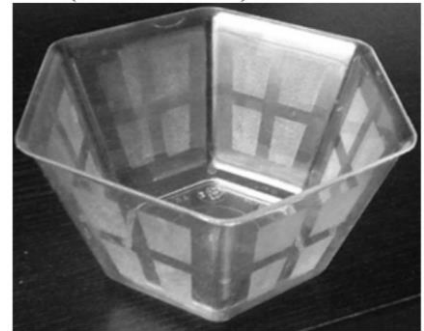
A térfogat kiszámítására nézünk egy másik megoldást is.

Az eredeti gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \frac{T \cdot M}{3}$, azaz $\frac{144 \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 288\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

A levágott kis gúla ehhez a gúlához hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$. De hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe, így a levágott gúla térfogata az eredeti gúla térfogatának $\frac{8}{27}$ -ed része: $V' = \frac{8}{27} \cdot 288\sqrt{3} = \frac{256\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.

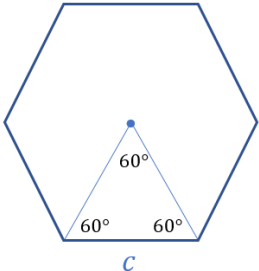
A csonka gúla térfogata ennek a kettőnek a különbsége: $288\sqrt{3} - \frac{256\sqrt{3}}{3} = \frac{608\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.

3. Egy műanyag terméket gyártó üzemben szabályos hatoldalú csonka gúla alakú, felül nyitott virágtartó dobozokat készítenek egy kertészet számára (lásd az ábrát). A csonkagúla alaplapja 13 cm oldalú szabályos hatszög, fedőlapja 7 cm oldalú szabályos hatszög, az oldalélei 8 cm hosszúak. Egy műanyagöntő gép 1 kg alapanyagból (a virágtartó doboz falának megfelelő anyagvastagság mellett) 0,93 m² felületet képes készíteni. Számítsa ki, hány virágtartó doboz készíthető 1 kg alapanyagból!²

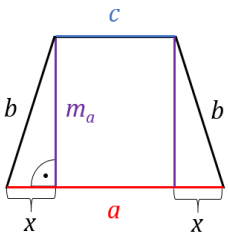


Megoldás:

Bár egy szabályos hatszög alapú csonka gúláról szól a feladat, de tulajdonképpen egy szabályos hatszög (oldala 7 cm; ez a fedőlap) és hat szimmetrikus trapéz (7 cm és 13 cm hosszúak az alapok, a szárai 8 cm-esek; ezek az oldallapok) területére lesz szükségünk. (Az alaplap területe nem kell.)

Szabályos hatszög		$c = 7 \text{ cm}$ $T_{\Delta} = \frac{c \cdot c \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{7^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \approx 21,22 \text{ cm}^2$ $t = 6 \cdot T_{\Delta} = 6 \cdot 21,22 = 127,31 \text{ cm}^2$
-------------------	---	--

² Érettségi feladat volt 2015-ben.

Oldallap		$a = 13 \text{ cm}$ $c = 7 \text{ cm}$ $b = 8 \text{ cm}$ $x = \frac{a-c}{2} = \frac{13-7}{2} = 3 \text{ cm}$	Pitagorasz tételével: $x^2 + m_a^2 = b^2$, azaz $3^2 + m_a^2 = 8^2$. $m_a = \sqrt{55} \approx 7,42 \text{ cm}$ $T_o = \frac{a+c}{2} \cdot m_a = \frac{13+7}{2} \cdot 7,42$ $T_o = 74,2 \text{ cm}^2$
----------	---	--	--

Így a virágtartó felülete: $F = t + 6 \cdot T_o = 127,31 + 6 \cdot 74,2 = 572,51 \text{ cm}^2$.

A megfelelő átváltással: $F = 572,51 \text{ cm}^2 = 5,7251 \text{ dm}^2 = 0,057251 \text{ m}^2$.

Tudjuk, hogy 1 kg alapanyag $0,93 \text{ m}^2$ felülethez elég. Azt kell megnéznünk, hogy ebbe hányszor fér bele a $0,057251 \text{ m}^2$:

$$\frac{0,93}{0,057251} \approx 16,24, \text{ így } 16 \text{ darab virágtartó doboz készíthető } 1 \text{ kg alapanyagból.}$$

Gyakorló feladatok

1. Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 24 cm, fedőéle 6 cm hosszú. Oldalélei 17,5 cm-esek. Mekkora a csonka gúla felszíne, térfogata?

(Az oldallap magassága $\sqrt{17,5^2 - 9^2} \approx 15 \text{ cm}$, így a testmagasság $\sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}$. Az alaplappal területe 576 cm^2 , a fedőlap területe 36 cm^2 , egy oldallap területe 225 cm^2 , a palást területe 900 cm^2 , így a felszín 1512 cm^2 , a térfogat 3024 cm^3 .)

2. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle 10 cm, magassága 12 cm. A gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal a magasság felezési pontján át két részre vágjuk. Mekkora az így kapott csonka gúla felszíne, térfogata?

(A gúla egy oldallapjának a magassága 13 cm. A csonka gúla alapéle 10 cm, fedőéle 5 cm, magassága 6 cm, egy oldallapjának magassága 6,5 cm. A felszín 320 cm^2 , a térfogat 350 cm^3 .)