

A GEOMETRIA ALAPJAI

1. Euklideszi axiómarendszer

- a) Euklidesz (i. e. 300), Elemek
- b) Alapfogalmak (pont, egyenes, sík, tér)
- c) Alaprelációk (illeszkedés, rendezés, tükrözés)
- d) Axiómák (illeszkedési, tükrözési, rendezési, mérési, párhuzamossági)

Párhuzamossági axióma: Adott a síkon egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont. Az adott ponton át pontosan egy olyan egyenes húzható, amelynek nincs közös pontja a megadott egyenessel. Ez a két egyenes párhuzamos.

2. Geometriai szerkesztések

- a) Eszközök: körző, egyélű vonalzó
- b) Nevezetes ponthalmazok: kör, szakaszfelező merőleges, szögfelező egyenes, stb.
- c) Háromszögek szerkeszthetőségének alapesetei
 - i) Adott két oldal és az általuk bezárt szög;
 - ii) Adott egy oldal és a rajta fekvő két szög;
 - iii) Adott két oldal és a nagyobbikkal szemben lévő szög;
 - iv) Adott mindhárom oldal;

3. Transzformációk

Definíció: A sík (vagy tér, esetleg ponthalmaz) önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezését **geometriai transzformációnak** nevezzük.

Definíció: Az olyan geometriai transzformáció, amelynél minden pont képe önmaga az **identikus leképezés** (helybenhagyás, identitás)

Definíció: Ha egy pont képe egy geometriai transzformáció során önmaga, akkor az a pont **fixpont**.

Definíció: Ha egy alakzat egy geometriai transzformáció során önmagába megy át, akkor az alakzat **invariáns**.

Definíció: Geometriai transzformációk egymás utáni elvégzését a **transzformációk szorzatának** nevezzük.

a) Egybevágósági transzformációk

Definíció: Az olyan geometriai transzformációt, ahol egy szakasz képe vele egyenlő hosszúságú szakasz, **egybevágósági transzformációnak** (egybevágóság, távolságtartó transzformáció) nevezzük.

Tétel: A sík összes egybevágósági transzformációja helyettesíthető legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzatával.

Egybevágósági transzformációk típusai:

i) *Tengelyes tükrözés*

Adott: egy egyenes

Tulajdonságok: távolságtartó, szögtartó, egyenestartó, a körüljárási irányt megfordítja, a tengely pontjai fixpontok

ii) *Eltolás*

Adott: egy vektor

Tulajdonságok: távolságtartó, szögtartó, egyenestartó, a körüljárási irányt megtartja, nincs fixpontja (kivéve, ha a vektor nullvektor, de akkor az identitást kapjuk)

iii) *Pont körüli forgatás*

Adott: egy pont és egy szög

Tulajdonságok: távolságtartó, szögtartó, egyenestartó, a körüljárási irányt megtartja, az adott pont fixpont

iv) *Középpontos tükrözés*

Adott: egy pont

Tulajdonságok: távolságtartó, szögtartó, egyenestartó, a körüljárási irányt megtartja, az adott pont fixpont, 180° -os forgatás

v) *Csúsztatva tükrözés*

Egy eltolás és egy tengelyes tükrözés szorzata

Szimmetriák

i) *Tengelyes szimmetria*

Található az alakzathoz egy olyan tengelyes tükrözés, amelyre invariáns.

Tengelyesen szimmetrikus alakzatok: kör, négyzet, téglalap, rombusz, deltoid, szabályos sokszögek, egyenlő szárú háromszög, szabályos háromszög, húrtrapéz, stb.

ii) *Forgásszimmetria*

Található az alakzathoz egy olyan pont körüli forgatás, amelyre invariáns.

Forgásszimmetrikus alakzatok: kör, négyzet, téglalap, rombusz, szabályos sokszögek, szabályos háromszög, stb.

iii) *Középpontos szimmetria*

Található az alakzathoz egy olyan középpontos tükrözés, amelyre invariáns.

Középpontosan szimmetrikus alakzatok: kör, négyzet, téglalap, rombusz, paralelogramma, páros oldalszámú szabályos sokszögek, stb.

Egybevágó alakzatok

Definíció: Két alakzat **egybevágó**, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi.

Háromszögek egybevágóságának alapesetei:

- i) Két háromszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik páronként egyenlő hosszúak.
- ii) Két háromszög egybevágó, ha két-két oldaluk és az általuk bezárt szög páronként egyenlő.
- iii) Két háromszög egybevágó, ha két-két oldaluk és a nagyobbikkal szemben lévő szög nagysága páronként egyenlő.
- iv) Két háromszög egybevágó, ha egy oldaluk hossza megegyezik, és az oldalakon lévő szögek nagysága is egyezik.

Sokszögek egybevágóságának alapesetei:

- i) Két sokszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik és átlóik hossza egyenlő.
- ii) Két sokszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik hossza és megfelelő szögeik nagysága is egyezik.

b) Középpontos hasonlóság

Alapja: A párhuzamos szelők tétele, a tétel megfordítása és a párhuzamos szelőszakaszok tétele.

Definíció: Adott a síkon egy pont (O , a középpont – centrum) és egy nullától különböző pozitív valós szám (λ , az arány). **Középpontos hasonlóság** esetén egy tetszőleges P pont képét a következőképpen kapjuk meg: Ha a P pont a középpont, akkor képe önmaga. Egyébként a P pont képe az a P' pont, amely illeszkedik az OP félegyenesre, és amelyre teljesül, hogy $OP' = \lambda \cdot OP$.

(Megjegyzés: Ha a középpontos hasonlóság arányának negatív számot is megengedünk, akkor az ellentett arányú középpontos hasonlóság után végre kell még hajtunk egy középpontos tükrözést is, amelynek középpontja a középpontos hasonlóság középpontjával egyezik.)

A középpontos hasonlóság tulajdonságai:

- i) A középpont fixpont;
- ii) Egyenes képe az eredeti egyenessel párhuzamos;
- iii) Szögtartó;
- iv) Bármely szakasz és képének aránya állandó (λ).

c) Hasonlóság

Definíció: Az olyan geometriai transzformációt, ahol egy szakasz és képe (amely szintén szakasz) hosszának aránya állandó, **hasonlósági transzformációnak** nevezzük.

Tétel: Minden hasonlósági transzformáció felírható egy középpontos hasonlóság és egy egybevágóság szorzataként.

Hasonlósági transzformációk tulajdonságai:

- i) Egyenes képe egyenes (egyenestartó);
- ii) Szögtartó;

Alakzatok hasonlósága

Definíció: Két alakzat **hasonló**, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi.

Háromszögek hasonlóságának alapesetei:

- i) Két háromszög hasonló, ha megfelelő oldalaik hosszának aránya állandó;
- ii) Két háromszög hasonló, ha két-két oldaluk hosszának aránya állandó, az oldalak által bezárt szögek pedig egyenlők;
- iii) Két háromszög hasonló, ha két-két oldaluk hosszának aránya állandó, a hosszabbikkal szemben lévő szögek pedig egyenlők;
- iv) Két háromszög hasonló, ha szögeik páronként egyenlő nagyságúak;

Sokszögek hasonlóságának alapesetei:

- i) Két sokszög hasonló, ha megfelelő oldalaik és megfelelő átlóik hosszának aránya állandó.
- ii) Két sokszög hasonló, ha megfelelő oldalaik hosszának aránya állandó, és megfelelő szögek egyenlők.

Tétel: Hasonló síkidomok kerületének aránya megegyezik a hasonlóság arányával. Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete.

Tétel: Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe.