

GEOMETRIA

1. Általános háromszögekre vonatkozó tételek

A) *Elemi geometriai tételek*

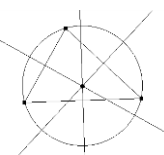
Háromszög-egyenlőtlenség: Egy háromszögben két oldal hosszának összege mindig nagyobb a harmadiknál.

Bármely háromszögben egyenlő hosszú oldalakkal szemben egyenlő nagyságú szögek vannak, illetve hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van és rövidebb oldallal szemben kisebb szög.

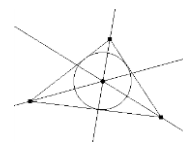
Bármely háromszög **belső szögeinek összege** 180° .

Bármely háromszögben egy **külső szög** nagysága megegyezik a nem mellette fekvő két belső szög nagyságának összegével.

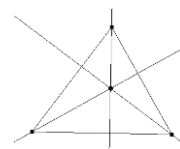
A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást. Ez a háromszög **köré írható kör** középpontja.



A háromszög három belső szögének felezője egy pontban metszi egymást. Ez a **háromszögbe írható kör** középpontja.



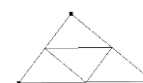
A háromszög három magasságvonala egy pontban metszi egymást. Ez a **magasságpont**.



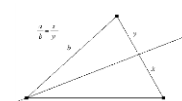
A háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást. Ez a **súlypont**. A súlypont a csúctól távolabbi harmadolópont.



A háromszög egy **középvonala** párhuzamos a harmadik oldallal és fele olyan hosszú. (Középvonali háromszöget adják.)

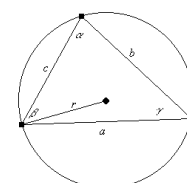


Szögfelezőtétel: A háromszög egy belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.



B) *Trigonometriai tételek*

Sinustétel: Bármely háromszögben két oldal aránya megegyezik a velük szemben lévő szögek sinusainak arányával. $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$



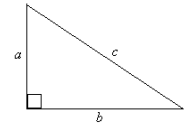
Általánosított sinustétel: $a = 2r \sin \alpha$.

Cosinustétel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

2. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek

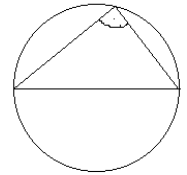
A) *Elemi geometriai tételek*

Pitagorasz-tétel: Derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege az átfogó négyzetével egyenlő: $a^2 + b^2 = c^2$



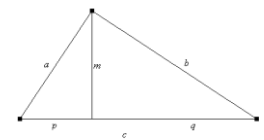
Pitagorasz-tétel megfordítása: Ha egy háromszögben a két legrövidebb oldal négyzetének összege a harmadik oldal négyzetével egyenlő, akkor a háromszög derékszögű.

Thalész-tétel: Ha egy szakasz mint átmérő fölé kört rajzolunk, és a körvonal bármely (a szakasz végpontjaitól különböző) pontját összekötjük a szakasz két végpontjával, derékszögű háromszöget kapunk.



Thalész-tétel megfordítása (egy megfogalmazásban): Derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezési pontja.

Befogótétel: Derékszögű háromszög befogója az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének mértani közepe.

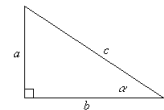


Magasságtétel: Derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót két szakaszra osztja. Az átfogóhoz tartozó magasság ennek a két szakasznak a mértani közepe.

B) *Trigonometriai tételek*

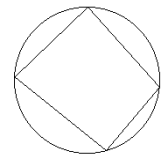
Szögfüggvények értelmezése derékszögű háromszögekben:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



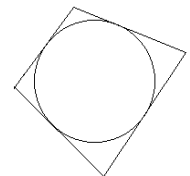
3. Négyszögek

Húrnégyszögek tétele: Egy húrnégyszög két szemközti szögének összege 180° .



Húrnégyszögek tételének megfordítása: Ha egy konvex négyszög két szemközti belső szögének összege 180° , akkor a négyszög húrnégyszög.

Érintőnégyzetek tétele: Bármely érintőnégyszög két-két szemközti oldalának összege állandó.



Érintőnégyzetek tételének megfordítása: Ha egy konvex négyszög két-két szemközti oldalának összege állandó, akkor a négyszög érintőnégyszög.

4. Sokszögek

Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsából húzható átlók száma: $n - 3$.

Az n oldalú konvex sokszög összes átlóinak száma: $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

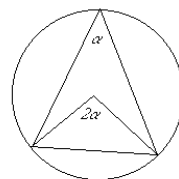
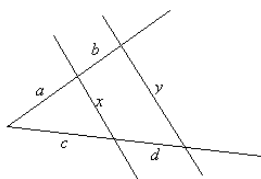
Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

5. Egyebek

Párhuzamos szelők tétele: Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik szögszáron lemetezett szakaszok aránya megegyezik a másik szögszáron lemetezett szakaszok arányával.

Párhuzamos szelők tételének megfordítása: Ha egy szög szárait két olyan egyenessel metsszük, amelyek a szög csúcsától mérve olyan szakaszokat adnak, amelyek aránya a szárakon állandó, akkor a két egyenes párhuzamos.

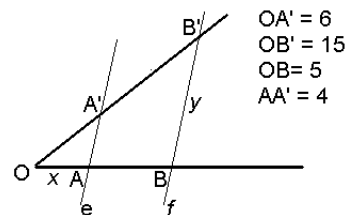
Párhuzamos szelőszakaszok tétele: Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor a szárak által a párhuzamosokból kimetszett szakaszok aránya megegyezik a szögszárakon lemetezett szakaszok arányával (a szög csúcsától mérve).



Kerületi és középponti szögek tétele: Egy körben adott húrhoz tartozó középponti szög kétszerese a húrhoz tartozó kerületi szögnek.

6. Feladatok

- Határozd meg az ábrán bejelölt ismeretlen szakaszok hosszát! (Az e és f egyenesek párhuzamosak.)
- Egy szög szárait elmetsettük két párhuzamos egyenessel. Az egyik szögszáron (a szög csúcsától indulva, egymás mellett) egy 3 cm és egy 9 cm hosszú szakasz keletkezett. A másik szögszáron a keletkezett rövidebbik szakasz 6 cm-es. A hosszabbik szelőszakasz 16 cm hosszú. Mekkora a másik szögszáron lévő másik szakasz és a rövidebbik szelőszakasz?
- Egy ötszög oldalai 2 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm és 9 cm. Egy hozzá hasonló ötszög legrövidebb oldala 5 cm. Mekkora a többi oldala? Hányszorosa a nagyobbik ötszög területe a kisebbiknek?
- Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 16 cm, szárjai 5 cm hosszúak, magassága pedig 4 cm-es. Határozd meg a trapéz kiegészítő háromszögének oldalait és területét!
- Egy rombusz átlói 10 és 24 cm hosszúak. Egy hozzá hasonló rombusz területe 1080 cm^2 . Mekkora a két rombusz kerülete?
- Egy háromszög oldalai (a hagyományos jelöléseket használva) $a = 3$, $b = 8$ és $c = 9$ egység hosszúak. Mekkora szeletekre osztja a b oldalt a B csúcsból kiinduló szögfelező?
- Egy 150 centiméter magas ember egy pontnak látja egy 2 és egy 6,5 méter magas fa csúcsát. Milyen távol áll a kisebbik fától, ha a két fa távolsága 27 méter?
- Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság 4 cm és 9 cm hosszú szeletekre bontja. Mekkora a háromszög oldalai, szögei, és mekkora a háromszög területe?
- Egy derékszögű háromszög egyik befogója 13 cm hosszú, átfogóhoz tartozó magasság pedig 12 cm-es. Mekkora a hiányzó oldalak?
- Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó 4 cm hosszú magassága az átfogót 1 : 4 arányban osztja. Mekkora a háromszög oldalai?
- Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz 8 cm hosszú magasság tartozik. Ez az átfogót két olyan szakaszra bontja, amelyek közül az egyik 12 cm-rel hosszabb a másiknál. Mekkora a háromszög oldalai, szögei, és mekkora a köré írható kör sugara?



12. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 10 cm és 16 cm hosszúak hegyesszöge 30° -os. Mekkora a trapéz kerülete, területe? Mekkora az átlói?
13. Mekkora szögben esnek a Nap sugarai a földre, ha egy 10 méter magas fa árnyéka 15 méter?
14. Egy út két oldalán egymással szemben egy-egy lakóház áll. Az egyik 10 méter magas, a másik 22. Az alacsonyabbik ház tetejéről a másik ház teteje $56,31^\circ$ -os emelkedési szögben látszik. Milyen széles az út?
15. Egy 6 cm sugarú kör középpontjától 10 cm távol lévő pontból érintőket húzunk a körhöz. Milyen hosszúak az érintőszakaszok? Mekkora szöget zárnak be az érintőszakaszok? Milyen hosszú az érintési pontokat összekötő húr?
16. Az ábrán látható körhöz a P pontból érintőket húztunk, az érintőszakaszok hossza 19,32 cm. Az érintési pontokat összekötő AB húr 10 cm-es. Mekkora az ábrán α -val jelölt szög? (A választ egész fokokra kerekítsd!)
17. Egy szabályos tízszög oldala 6 cm hosszú. Mekkora a területe, és mekkora a beírt és köré írt körének sugara?
18. Egy szabályos tizenkétszög köré írt körének sugara 10 cm. Mekkora a sokszög oldala, és mekkora a beírt kör sugara?
19. Egy háromszög két oldala 8 cm és 11 cm, a háromszög területe 22 cm^2 . Mekkora lehet a két oldal által bezárt szög?
20. Egy háromszög 10 cm-es oldalán 32° és 78° nagyságú szögek vannak. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai?
21. Egy háromszög két oldalának összege 20 cm, az oldalakkal szemben lévő szögek 40° és 80° nagyságúak. Mekkora a háromszög kerülete, területe?
22. Egy háromszögben a 10 cm hosszú oldallal szemben 30° -os szög van. Mekkora sugarú kör írható a háromszög köré?
23. Egy háromszög szögeinek aránya $3 : 7 : 8$. Mekkora az oldalai, ha a köré írható kör sugara 10 cm.
24. Egy háromszög két oldala 8 cm és 13 cm, az általuk bezárt szög 60° -os. Mekkora a háromszög ismeretlen oldala, és mekkora az ismeretlen szögek?
25. Egy paralelogramma két oldala 6 cm és 12 cm hosszú, hegyesszöge 60° -os. Mekkora az átlói?
26. Szögei szerint milyen az a háromszög, amelynek oldalai 12 cm, 15 cm és 20 cm hosszúak?
27. Egy trapéz párhuzamos oldalai 12 cm és 7 cm hosszúak. A trapéz két szöge 65° és 44° nagyságú. Mekkora a trapéz kerülete, területe?
28. Egy háromszögben megegyezik az egyik oldal hossza a háromszög köré írható kör sugarának hosszával. Mekkora szög lehet az oldallal szemben?
29. Egy víztározó víztükrének alakját az ábrán látható módon az $ABCD$ paralelogrammával közelítjük. A paralelogrammának az $1 : 30\,000$ méretarányú térképen mért adatai: $AB = 4,70 \text{ cm}$, $AD = 3,80 \text{ cm}$ és $BD = 3,30 \text{ cm}$.
- a) A helyi önkormányzat olyan kerékpárút építését tervezi, amelyen az egész víztározót körbe lehet kerekézni. Hány km hosszúságú lesz ez az út, ha hossza kb. 25%-kal több a paralelogramma területénél? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!
- b) Mekkora az a legnagyobb távolság, amelyet motorcsónakkal, irányváltoztatás nélkül megtehetünk a víztározó víztükrén? Válaszát km-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

